755F

755

F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور

رشته‌ی ریاضی محض گرایش‌های آنالیز (کد ۱۷۶)، جبر (کد ۱۷۷) و هندسه (کد ۱۷۸)

تعداد سؤال: ۶۰ — مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	آنالیز حقیقی (۱)	۳۰	۱	۳۰
۲	جبر پیشرفته	۳۰	۳۱	۶۰

آذر ماه سال ۱۳۹۲

نمره منفی ندارد.
استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- کوچکترین سیگما جبر روی $\mathbb{R}$ که شامل همهٔ مجموعه‌های B که $[0,1] \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ است عبارتست از کلیه مجموعه‌های .... که شامل .... باشند.

۱) B، $[0,1]$ یا مشمول در $\mathbb{R} \setminus [0,1]$

۲) باز یا بسته B، $[0,1]$ یا مشمول در $\mathbb{R} \setminus [0,1]$

۳) بورل B، $[0,1]$ یا مشمول در $\mathbb{R} \setminus [0,1]$

۴) B، $[0,1]$

۲- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد. تعریف می‌کنیم $\mu(\phi)=0$, $\mu(A)=\sum_{n\in A} a_n \,(A\subseteq \mathbb{N}, A\neq \phi)$. آنگاه μ ....

۱) روی σـ جبر مناسبی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یک اندازه است ولی نمی‌تواند روی کل زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یک اندازه باشد.

۲) یک اندازه روی $\mathbb{N}$ است مشروط بر آنکه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

۳) یک اندازه روی $\mathbb{N}$ است مشروط بر آنکه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

۴) یک اندازه روی $\mathbb{N}$ است.

۳- فرض کنید m اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) برای هر $0<\delta<1$، زیرمجموعهٔ بازی از $[0,1]$ با اندازهٔ لبگ δ موجود است.

۲) زیرمجموعه بورل E از $\mathbb{R}$ موجود است که برای هر بازه ناتهی I در $\mathbb{R}$، $0 < m(E\cap I) < m(I)$.

۳) هیچ زیر مجموعه کاملاً ناهمبند فشرده از $\mathbb{R}$ اندازه لبگ ناصفر ندارد.

۴) هر زیر مجموعه فشردهٔ $\mathbb{R}$، محمل (تکیه‌گاه) یک اندازهٔ بورل روی $\mathbb{R}$ است.

۴- اگر $E \subseteq [0,1]$، $E \neq [0,1]$ و $m(E)=1$، که m اندازه لبگ است، آنگاه ....

۱) E هر بازهٔ (α,β) را که $0<\alpha<\beta<1$ قطع می‌کند.

۲) E در $[0,1]$ چگال است.

۳) E نمی‌تواند بسته باشد.

۴) هر سه گزینه صحیح است.

۵- اگر $E\subseteq \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $(n\in\mathbb{N})$ $nE=\{nx : x\in E\}$ در مورد $\alpha = m(nE)$ و $\beta = m(E)$، که در آن m اندازهٔ لبگ است، چه می‌توان گفت؟

۱) همواره $\alpha \geq n\beta$ ولی ممکن است تساوی برقرار نباشد.

۲) همواره $\alpha \leq n\beta$ ولی ممکن است تساوی برقرار نباشد.

۳) همواره $\alpha = n\beta$

۴) همواره $\alpha > \beta$

۶- اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و $m(E) = ۰$ که در آن m اندازه لبگ باشد، در مورد E چه می‌توان گفت؟

۱) E حداکثر شماراست

۲) E نمی‌تواند بی‌کران باشد.

۳) E نمی‌تواند در $\mathbb{R}$ چگال باشد.

۴) E نمی‌تواند باز باشد ولی می‌تواند بی‌کران باشد.

۷- تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ تقریباً همه جا روی $[۰,\infty)$ تعریف شده است. اگر $\alpha = \int_۰^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_۰^b f(x)dx$ انتگرال ریمان ناسره f باشد، آنگاه f ....

۱) انتگرال‌پذیر لبگ است و انتگرال لبگ آن روی $[۰,\infty)$ با α برابر است.

۲) انتگرال‌پذیر لبگ نیست ولی α موجود است.

۳) انتگرال‌پذیر لبگ نیست و α موجود نیست.

۴) انتگرال‌پذیر لبگ است ولی α موجود نیست.

۸- اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $\int_۰^۱ f(x)dx = ۱$ (انتگرال لبگ) و $E = \{x \in [۰,۱] : f(x) > ۱\}$، مقدار انتگرال لبگ $\int_E (f(x) - ۱)dx$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۲}\int_۰^۱ |f(x) - ۱|dx$

۴) $\frac{۱}{۲} - m(E)$ که m اندازهٔ لبگ است.

۹- اگر $A_n \subseteq [۰,۱]$ اندازه‌پذیر لبگ و $m(A_n) = \frac{۱}{n^۲}$، که در آن m اندازه لبگ باشد، در مورد $\sum_{n=۱}^{\infty}\chi_{A_n}$ چه می‌توان گفت؟ (χ_A تابع مشخصهٔ A است)

۱) تقریباً همه جا همگراست ولی لزوماً همگرای نقطه‌ای نیست.

۲) ممکن است روی یک مجموعه با اندازه مثبت واگرا باشد.

۳) همگرای نقطه‌ای است ولی لزوماً همگرای یکنواخت نیست.

۴) همگرای یکنواخت است.

۱۰- اگر $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد و $f(x) = \int_a^x g(t)dt \quad (a \le x \le b)$ (انتگرال لبگ) تابع f روی $[a,b]$ ....

۱) اندازه‌پذیر لبگ است ولی لزوماً انتگرال‌پذیر لبگ نیست.

۲) اندازه‌پذیر لبگ است ولی لزوماً پیوسته نیست.

۳) پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۴) پیوسته یکنواخت است.

۱۱- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و $f:X\to[0,\infty]$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد و $E\in M$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $\mu E=0$ آنگاه $\int_E f\,d\mu=0$

۲) اگر $f>0$ روی E، ممکن است $\int_E f\,d\mu=0$

۳) اگر $f>0$ روی E، همواره $\int_E f\,d\mu\geq 0$

۴) اگر $\int_E f\,d\mu=0$ آنگاه $f=0$ تقریباً همه جا روی E

۱۲- اگر $X=\{1,2,\dots,n\}$ که $n\in\mathbb{N}$ و μ اندازه شمارشی روی X باشد و $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ $(x\in X)$، مقدار $\int_X f\,d\mu$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{n+1}$

۲) $\frac{1}{n+1}$

۳) $1+\frac{1}{n}$

۴) $1+\frac{n}{n+1}$

۱۳- اگر $f:X\to\mathbb{R}$ تابعی مفروض باشد، آنگاه اگر ....

۱) f اندازه‌پذیر نباشد، $\{x:f(x)=a\}$ برای هیچ $a\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر نیست.

۲) مجموعهٔ $\{x:f(x)=a\}$ برای هر $a\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد، تابع f اندازه‌پذیر است، ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست.

۳) f اندازه‌پذیر باشد، مجموعهٔ $\{x:f(x)=a\}$ برای هر $a\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است، ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست.

۴) f اندازه‌پذیر نباشد، ممکن است $\{x:f(x)=a\}$ برای برخی $a\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد، ولی نمی‌تواند برای هر $a\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد.

۱۴- اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد، آنگاه ....

۱) اگر $|f|$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f و $-f$ هر دو اندازه‌پذیرند، ولی عکس این موضوع برقرار نیست.

۲) اگر f اندازه‌پذیر باشد، $|f|$ نیز اندازه‌پذیر است، ولی عکس این گزاره برقرار نیست.

۳) $|f|$ اندازه‌پذیر است، اگر و فقط اگر توابع f و $-f$ هر دو اندازه‌پذیر باشند.

۴) اندازه‌پذیری f و $|f|$ در حالت کلی هیچیک دیگری را ایجاب نمی‌کند.

۱۵- اگر $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی مفروض باشند، که در آن f اندازه‌پذیر لبگ و g پیوسته است، آنگاه ....

۱) fog، gof هر دو اندازه‌پذیر لبگ هستند.

۲) fog، gof هیچکدام لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیستند.

۳) gof اندازه‌پذیر لبگ است ولی fog لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیست.

۴) fog اندازه‌پذیر لبگ است ولی gof لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیست.

۱۶- کدام گزینه برای تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ نادرست است؟

۱) اگر f یکنوا باشد، اندازه‌پذیر بورل است.

۲) اگر f اندازه‌پذیر بورل باشد، اندازه‌پذیر لبگ است.

۳) اگر f تقریباً همه جا پیوسته باشد، اندازه‌پذیر لبگ است.

۴) اگر f تقریباً همه جا با یک تابع پیوسته برابر باشد، اندازه‌پذیر لبگ است.

۱۷- اگر μ یک اندازه مثبت روی X باشد و $f : X \to [0,\infty]$ اندازه‌پذیر بوده و $\int_X f\,d\mu = c > 0$ آنگاه مقدار $I = \lim_{n\to\infty} \int_X n\log(1+(\frac{f}{n})^{\alpha})d\mu$ کدام است؟ ($\alpha \geq 0$ عددی ثابت است)

۱) $I = \infty$ اگر $0 < \alpha < 1$ و $I = 0$ اگر $\alpha = 1$ و $I = c$ اگر $1 < \alpha < \infty$

۲) $I = \infty$ اگر $0 < \alpha < 1$، $I = 0$ اگر $1 < \alpha < \infty$ و $I = c$ اگر $\alpha = 1$

۳) $I = c$ اگر $1 \leq \alpha < \infty$، $I = \infty$ اگر $0 < \alpha < 1$

۴) $I = \infty$ اگر $0 < \alpha \leq 1$ و $I = c$ اگر $1 < \alpha < \infty$

۱۸- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط کراندار و اندازه‌پذیر روی X باشد که $f_n \to f$ بطور یکنواخت روی X، آنگاه ....

۱) همواره $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$

۲) اگر $\mu X < \infty$ آنگاه $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$

۳) اگر $X = \mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشد، $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$

۴) اگر $X = [0,1]$ و μ اندازه شمارشی باشد، $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$

۱۹- اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی فضای اندازه (X,M,μ) باشد و (اندازه) $f_n \to f$ (همگرایی در اندازه)، آنگاه ....

۱) $\int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

۲) $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f\,d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$

۳) گزینه ۱ برای یک زیر دنباله $\{f_n\}$ صحیح است، ولی لزوماً برای دنباله صحیح نیست.

۴) گزینه ۲ برای یک زیر دنباله $\{f_n\}$ صحیح است، ولی لزوماً برای دنباله صحیح نیست.

۲۰- اگر (اندازه) $f_n \to f$ و (اندازه) $g_n \to g$ (هر دو همگرایی در اندازه است) آنگاه از دو گزاره (اندازه) $f_n + g_n \to f + g$ و (اندازه) $f_n g_n \to f_g$ می‌توان نتیجه گرفت که ....

۱) اولی همواره درست است و دومی در حالتی درست است که اندازه فضا متناهی باشد.

۲) دومی همواره درست است و اولی در حالتی درست است که اندازه فضا متناهی باشد.

۳) هر دو فقط در حالتی درست است که اندازه فضا متناهی باشد.

۴) هر دو درست است.

۲۱- اگر $X = \mathbb{N}$ و M سیگما جبر همه زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و μ اندازه شمارشی بر $\mathbb{N}$ باشد، حکم (اندازه) $f_n \to f$ (همگرایی در اندازه) برای توابع اندازه‌پذیر $f_n : X \to \mathbb{R}$ و تابع اندازه‌پذیر $f : X \to \mathbb{R}$ با کدام گزاره معادل است؟

۱) $f_n \to f$ (یکنواخت)

۲) $f_n \to f$ (نقطه‌ای)

۳) $\sum_{k=1}^{\infty} |f_n(k) - f(k)| \to 0$ هرگاه $n \to \infty$

۴) $f_{n_k} \to f$ (نقطه‌ای) برای یک زیر دنباله (f_{n_k}) از (f_n)

۲۲- حدود

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\infty} (1+\frac{x}{n})^{-n} \sin(\frac{x}{n})dx$$

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{1+nx^{2}}{(1+x^{2})^{n}}dx$$

را در نظر بگیرید، کدام گزینه صحیح است؟

۱) چون تابع سینوس نوسانی است α موجود نیست، β موجود و صفر است.

۲) هر دو حد از قضیه همگرایی تسلطی لبگ موجودند و β ناصفر است.

۳) هر دو حد از قضیه همگرایی تسلطی لبگ موجودند و α ناصفر است.

۴) هر دو حد از قضیه همگرایی تسلطی لبگ موجود و صفرند.

۲۳- **اگر $f_n : X \to [0,\infty)$ توابعی اندازه‌پذیر بر فضای اندازه (X,M,μ) باشند،**

تساوی $\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$ ....

۱) بنا به لم فاتو فقط در صورتی برقرار است که $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_n\, d\mu$ متناهی باشد.

۲) بنا به قضیه همگرایی تسلطی لبگ فقط در صورتی برقرار است که $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ انتگرال‌پذیر باشد.

۳) بنا به قضیه همگرایی تسلطی لبگ فقط در صورتی برقرار است که $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu < \infty$

۴) بنا به قضیه همگرایی یکنوا همواره برقرار است.

۲۴- **لم فاتو برای lim sup به جای lim inf به کدام صورت برقرار است؟**

۱) به صورت $\int_X (\limsup f_n) d\mu \le \limsup \int_X f_n\, d\mu$ برقرار است.

۲) به صورت $\int_X (\limsup f_n) d\mu \ge \limsup \int_X f_n\, d\mu$ برقرار است.

۳) گزینه (۲) در صورتی برقرار است که f_nها، همگی منفی باشند.

۴) گزینه (۱) در صورتی برقرار است که f_nها، همگی منفی باشند.

۲۵- **اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و μ اندازه‌ای مثبت باشد، برای $1 \le r \le p \le s \le \infty$، کدام گزینه همواره صحیح است؟ (فضای $L^p(X,\mu)$ باختصار با $L^p(\mu)$ نشان داده شده است.)**

۱) $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu) \cap L^s(\mu)$

۲) $L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subseteq L^p(\mu)$

۳) $L^s(\mu) \subseteq L^r(\mu)$

۴) $L^r(\mu) \subseteq L^s(\mu)$

۲۶- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و $f_n \in L^{\infty}(X,\mu)$ و f و $f_n \to f\,(a.e)$ (همگرایی تقریباً همه جا) آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\|f_n - f\|_{\infty} \to 0$ در صورتی که $\|f_n\|_{\infty} \to \|f\|_{\infty}$

۲) $\|f_n - f\|_{\infty} \to 0$

۳) $\|f_n\|_{\infty} \to \|f\|_{\infty}$

۴) هر سه مورد

۲۷- اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای متعامد در یک فضای هیلبرت H باشد و $x \in H$ و $\langle x_n , x_n\rangle = 1$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، آنگاه برای $I(p) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n , x\rangle|^p$ داریم ....

۱) $I(p)$ برای هر $p \geq 1$ همگراست.

۲) $\langle x_n , x\rangle \to 0$ ولی $I(2)$ ممکن است واگرا باشد.

۳) $I(2)$ همگراست ولی $I(1)$ ممکن است واگرا باشد.

۴) $I(1)$ همگراست ولی $I(2)$ ممکن است واگرا باشد.

۲۸- اگر H یک فضای هیلبرت و $A \subseteq H$ و $A^{\perp} = \{y \in H : \langle y , x\rangle = 0 \ \ (x \in A)\}$ آنگاه ....

۱) $A \supseteq A^{\perp\perp}$ و $A \cup A^{\perp} = H$ و $A \cap A^{\perp} = \{0\}$

۲) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ و $A \cap A^{\perp} = \{0\}$

۳) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ و $A \cup A^{\perp} = H$

۴) $A^{\perp\perp} = A$

۲۹- اگر X و Y دو فضای نرم‌دار و $T : X \to Y$ یک تبدیل خطی باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر معادل پیوستگی T نیست؟

۱) T کراندار است.

۲) T در یک نقطه پیوسته است.

۳) T هر مجموعه باز را به یک مجموعه باز می‌نگارد.

۴) T روی یک مجموعه باز ناتهی X پیوسته است.

۳۰- اگر X یک فضای نرم‌دار و B گوی یکه X باشد، کدام گزاره نادرست است؟

۱) اگر $X = C[0,1]$، B محدب اکید (اکیداً محدب) است.

۲) اگر $X = L^p(X,\mu)$ $(1 < p < \infty)$، B محدب اکید است.

۳) اگر $X = L^{\infty}(X,\mu)$، B محدب اکید نیست.

۴) B همواره محدب است.

۳۱- **کدام گزینه نادرست است؟**

۱) هر میدان یک حلقه اولیه است.

۲) اگر R حلقه‌ای یکدارو ساده باشد آنگاه اولیه است.

۳) اگر R حلقه‌ای یکدارو اولیه باشد آنگاه R ساده است.

۴) اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و اولیه باشد آنگاه میدان است.

۳۲- **اگر R یک حلقه آرتینی چپ باشد کدام گزینه با بقیه معادل نیست؟**

۱) R اولیه است.

۲) $J(R) = R$

۳) $\exists n \in \mathbb{N} ; R \cong Mat_n(D)$ (D یک حلقهٔ بخشی است.)

۴) $R \cong Hom_D(V,V)$، که در آن $V \neq 0$ یک فضای برداری با بعد متناهی بر حلقهٔ بخشی D است

۳۳- **فرض کنید A یک مدول چپ روی حلقهٔ R باشد و A^{**} دوگان مضاعف A باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟**

۱) اگر R یکدار و A آزاد باشد آنگاه یک تکریختی از R ـ مدول‌ها مانند $\theta : A \to A^{**}$ وجود دارد.

۲) اگر R یکدار و A آزاد باشد آنگاه یک بروریختی از R ـ مدول‌ها مانند $\theta^{-} : A \to A^{**}$ وجود دارد.

۳) اگر R یکدار و A آزاد باشد R ـ مدول‌های A و A^{**} یکریختند.

۴) اگر R تعویض‌پذیر باشد R ـ مدول‌های A و A^{**} یکریختند.

۳۴- **فرض کنید R یک حلقه است و $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ یک دنباله کامل کوتاه از همریختی‌های R ـ مدول‌ها باشد. در این صورت کدام گزینه با بقیه معادل نیست؟**

۱) $C \cong \frac{B}{A}$ (به صورت R ـ مدولی)

۲) $B \cong A \oplus C$ (به صورت R ـ مدولی)

۳) یک همریختی R ـ مدول‌ها مانند $k : B \to A$ وجود دارد که $kf = 1_A$

۴) یک همریختی R ـ مدول‌ها مانند $h : C \to B$ وجود دارد که $gh = 1_C$

۳۵- **فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟**

۱) هر R ـ مدول تصویری یک R ـ مدول آزاد است.

۲) هر R ـ مدول نقش همریخت یک R ـ مدول تصویری است.

۳) برای هر R ـ مدول تصویری P یک R ـ مدول آزاد مانند F و یک R ـ مدول K هست که $F \cong K \oplus P$

۴) برای هر مدول آزاد F روی حلقه R یک R ـ مدول تصویری مانند P و یک R- مدول K هست که $F \cong K \oplus P$

۳۶- کدام گزینه یک R ـ مدول باوفا **نیست**؟

۱) $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول
۲) $\mathbb{Z}_4$ به عنوان $\mathbb{Z}_4$ ـ مدول
۳) $\mathbb{Z}_p$ به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول
۴) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول

۳۷- فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار باشد و $I = Rad(0)$ رادیکال اول حلقهٔ R باشد. در این صورت کدام گزینه با بقیه معادل **نیست**؟

۱) هر عنصر R یا وارونپذیر است یا پوچتوان
۲) R دقیقاً یک ایده‌آل اول دارد.
۳) $\frac{R}{I}$ یک میدان است.
۴) $J(R) = 0$

۳۸- کدام یک از حلقه‌های زیر یک حلقهٔ نوتری **نیست**؟

۱) $\mathbb{Z}[x, y, z]$
۲) $\mathbb{Z}_7[[x]]$
۳) حلقهٔ تعویض‌پذیر و یکداری که هر ایده‌آل اول آن دوری است.
۴) حلقهٔ تعویض‌پذیر و یکداری که هر ایده‌آل ماکزیمال آن با تولید متناهی است.

۳۹- در ردهٔ گروه‌ها کدام گزینه صحیح است؟

۱) شئ عمومی (اولیه) دارد ولی شئ هم عمومی (نهایی) ندارد.
۲) شئ عمومی (اولیه) ندارد ولی شئ هم عمومی (نهایی) دارد.
۳) شئ عمومی (اولیه) و شئ هم عمومی (نهایی) دارد.
۴) شئ عمومی (اولیه) و شئ هم عمومی (نهایی) ندارد.

۴۰- فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است و I ایده‌آلی در حلقهٔ R می‌باشد. در این‌صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $Rad(I_1 \cap I_2) = Rad(I_1 I_2)$
۲) $Rad(I_1 I_2) = Rad(I_1) Rad(I_2)$
۳) $Rad(Rad(I)) = Rad(I)$
۴) $Rad(I^m) = Rad(I)$

۴۱- فرض کنید D یک حلقهٔ بخشی باشد و دو زیر فضای برداری V و W از $Mat_2(D)$ را در نظر بگیرید که

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in D \right\}, W = \left\{ \begin{bmatrix} d & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \middle| c, d \in D \right\}$$

در این صورت $\dim(V + W)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۲- فرض کنید $\mathbb{R}$ حلقهٔ $\mathbb{Z}_{p^2}$ باشد که در آن p عددی اول و فرد و I ایده‌آلی از R باشد که با $\mathbb{Z}_p$ یکریخت است. در این صورت چند R ـ مدول با تولید متناهی مانند M وجود دارد که $M = IM$؟

۱) p^2
۲) p
۳) ۲
۴) ۱

۴۳- فرض کنید $G =< a >$ گروه دوری مرتبه ۳۶ باشد فرض کنید $B =< a^9 >$ و $D =< a^2 >$ زیر گروه‌های G باشند. در این صورت اگر j و i نگاشت‌های شمول باشند و $0 \to B \xrightarrow{i} G \to \frac{G}{B} \to 0$ و $0 \to D \xrightarrow{j} G \to \frac{G}{D} \to 0$ دنباله‌های کامل کوتاه از $\mathbb{Z}$ − مدولها باشند در این صورت ....

۱) فقط دنبالهٔ اولی یک دنبالهٔ کامل تجزیه است.
۲) فقط دنباله دومی یک دنباله کامل تجزیه است.
۳) هر دو دنباله کامل تجزیه هستند.
۴) هیچ‌یک دنباله‌های کامل تجزیه نیستند.

۴۴- فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است. اگر R تنها دارای دو ایده‌آل اول ناصفر P_1 و P_2 باشد در این صورت $J(\frac{R}{P_1P_2})$ با کدام گزینه یکریخت است؟

۱) $P_1 + P_2$
۲) $P_1 \cap P_2$
۳) $\frac{P_1 + P_2}{P_1P_2}$
۴) $\frac{P_1 \cap P_2}{P_1P_2}$

۴۵- فرض کنید $R = \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. در این صورت $J(R)$ با کدام گزینه یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}_6$
۲) $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Q}$
۳) $\mathbb{Z}_{18}$
۴) $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Q}$

۴۶- فرض کنید p عددی اول باشد و $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{p^3} \times \dots$ در این صورت ....

۱) R یک حلقه نیمه ساده (ژاکوبسن) است.
۲) R یک حلقهٔ موضعی است.
۳) R عنصر پوچتوان ناصفر ندارد.
۴) $J(R) \cong R$ (به عنوان دو حلقه)

۴۷- فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است و e عنصری خود توان از R باشد، (یعنی $e^{2} = e$). در این صورت کدام‌یک در مورد $I = Re + R(1-e)$ صحیح است؟

۱) مجموع مستقیم نیست ولی $I = R$
۲) مجموع مستقیم است و $I = R$
۳) مجموع مستقیم نیست و I یک ایده‌آل سره R است.
۴) مجموع مستقیم است و I یک ایده‌آل سره R است.

۴۸- می‌دانیم که هرگروه G را می‌توان به عنوان رسته‌ای با یک شئ در نظر گرفت. اگر C_1 و C_2 به ترتیب رسته‌هایی با یک شئ نظیر گروه‌های جمعی $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ باشند تعداد تابعگرهای از C_1 به C_2 کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۹- اگر M یک $\mathbb{Z}$ مدول باشد آنگاه کدام یک از تابعگرهای زیر دقیق راست است؟

۱) $\mathrm{Hom}_z(\mathbb{Q}$ و $M \otimes_{\mathbb{Z}} -)$
۲) $\mathrm{Hom}_z(\mathbb{Z}[x]$ و $M \otimes_{\mathbb{Z}} -)$
۳) $\mathrm{Hom}_z(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ و $M \otimes_{\mathbb{Z}} -)$
۴) $\mathrm{Hom}_z(\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ و $M \otimes_{\mathbb{Z}} -)$

۵۰- فرض کنید اگر $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$ حلقه‌هایی باشند و P یک R_2 ــ مدول تصویری باشد در این صورت ....

۱) P یک R_1 ـ مدول تصویری است ولی لزومی ندارد که R_3 ــ مدول تصویری باشد.
۲) P هم یک R_1 ـ مدول تصویری است و هم یک R_3 ـ مدول تصویری
۳) P یک R_3 ـ مدول تصویری است ولی لزومی ندارد که R_1 ــ مدول تصویری باشد.
۴) لزومی ندارد P یک R_1 ـ مدول تصویری یا یک R_3 ـ مدول تصویری باشد.

۵۱- فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول یکانی انژکتیو باشد. در این صورت به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول $R[x]$ و $R[[x]]$ به ترتیب ......

۱) انژکتیو است ـ انژکتیو نیست
۲) انژکتیو نیست ـ انژکتیو است
۳) هر دو انژکتیو هستند
۴) هیچ‌یک انژکتیو نیستند.

۵۲- فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند در این صورت گروه آبلی $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n[[x]])$ به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول با کدام‌یک یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}_d[[x]]$، که $d = (m,n)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n است.
۲) $\mathbb{Z}_d[x]$، که $d = (m,n)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n است.
۳) $\mathbb{Z}_c[x]$، که c کوچکترین مضرب مشترک m و n است.
۴) $\mathbb{Z}_c[[x]]$، که c کوچکترین مضرب مشترک m و n است.

۵۳- فرض کنید $G=\langle a\rangle$ گروهی دوری از مرتبهٔ ۴۵ باشد و فرض کنید $H=\langle a^{9}\rangle$. در این صورت به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول، گروه زیر با کدام گزینه یکریخت است؟ $\dfrac{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{105},G)}{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{105},H)}$

۱) $\mathbb{Z}_3$
۲) $\mathbb{Z}_5$
۳) $\mathbb{Z}_9$
۴) $\mathbb{Z}_{15}$

۵۴- فرض کنید D یک حلقهٔ بخشی و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی D باشد. در این صورت کدام گزینه در مورد حلقه درونریختی V یعنی $\mathrm{Hom}_D(v,v)$ نادرست است؟

۱) یک حلقهٔ نوتری است.
۲) یک حلقهٔ ساده است.
۳) یک D ـ مدول چپ نوتری است.
۴) یک D ـ مدول چپ ساده است.

۵۵- فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است و I و J دو ایده‌آل R باشند. در این صورت گروه آبلی زیر با کدام گزینه یکریخت است؟

$$\mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{I},\mathrm{Hom}_{\frac{R}{I+J}}\left(\frac{R}{J},\frac{R}{I+J}\right)\right)$$

۱) $\dfrac{R}{I+J}$
۲) $\dfrac{R}{I\cap J}$
۳) $\dfrac{R}{I}$
۴) $\dfrac{R}{J}$

۵۶- کدام گزینه با بقیه یکریخت نیست؟

۱) $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{p^\infty}$، که p عددی اول است.
۲) $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_2[x]$
۳) $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$
۴) $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$

۵۷- فرض کنید R حلقه‌ای یکداراست و M یک R ـ مدول چپ یکانی باشد. در این صورت اگر $R[x]$ حلقهٔ چند جمله‌ای‌ها روی R باشد آنگاه به عنوان یک گروه آبلی $\mathrm{Hom}_R\left(\dfrac{R[x]}{(x^2)},M\right)$ با کدام گزینه یکریخت است؟

۱) $R\times R$
۲) $R\times M$
۳) $M\times M$
۴) $R[x]\times R[x]$

۵۸- فرض کنید G گروه آزاد روی مجموعهٔ ناتهی X و $a \in X$ باشد. دراین صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر G ناآبلی باشد آنگاه $|X| > 1$.

۲) اگر $|X| > 1$، گروه G ناآبلی است.

۳) هر گروه آزاد یک حاصل ضرب آزاد از گروه‌های دوری نامتناهی است.

۴) ممکن است $\langle a \rangle$ به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول با $\mathbb{Z}_n$ ای یکریخت باشد.

۵۹- فرض کنید R حلقه‌ای یکداراست. کدام یک از R ـ مدول‌های زیر انژکتیو است؟

۱) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z})$

۲) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q})$

۳) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_n[x])$

۴) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}_p)$ ، که p عددی اول است.

۶۰- اگر F یک میدان باشد و $R = F[x, y]$، آنگاه در کدام گزینه $\mathrm{Rad}(Q)$ یک ایده‌آل اول نیست؟

۱) Q ایده‌آل (x^2, y) باشد.

۲) Q ایده‌آل $(x^2 y, xy)$ باشد.

۳) Q ایده‌آل (x^2, y^2) باشد.

۴) Q ایده‌آل (x, y) باشد.