754F

754

F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور

رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش‌های آنالیز عددی (کد ۱۷۴) و تحقیق در عملیات (کد ۱۷۵)

تعداد سؤال: ۶۰ | مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	آنالیز حقیقی (۱)	۳۰	۱	۳۰
۲	آنالیز عددی پیشرفته	۳۰	۳۱	۶۰

آذر ماه سال ۱۳۹۲

نمره منفی ندارد.
استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- کوچکترین سیگما جبر روی $\mathbb{R}$ که شامل همهٔ مجموعه‌های B که $\mathbb{R} \supseteq B \supseteq [0,1]$ است عبارتست از کلیه مجموعه‌های .... که شامل .... باشند.

۱) B، $[0,1]$ یا مشمول در $\mathbb{R}\setminus[0,1]$

۲) باز یا بسته B، $[0,1]$ یا مشمول در $\mathbb{R}\setminus[0,1]$

۳) بورل B، $[0,1]$ یا مشمول در $\mathbb{R}\setminus[0,1]$

۴) B، $[0,1]$

۲- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد. تعریف می‌کنیم $\mu(\phi)=0$, $\mu(A)=\sum_{n\in A} a_n \ (A\subseteq \mathbb{N}, A\neq\phi)$. آنگاه μ ....

۱) روی σ- جبر مناسبی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یک اندازه است ولی نمی‌تواند روی کل زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یک اندازه باشد.

۲) یک اندازه روی $\mathbb{N}$ است مشروط بر آنکه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

۳) یک اندازه روی $\mathbb{N}$ است مشروط بر آنکه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

۴) یک اندازه روی $\mathbb{N}$ است.

۳- فرض کنید m اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) برای هر $0<\delta<1$، زیرمجموعهٔ بازی از $[0,1]$ با اندازه لبگ δ موجود است.

۲) زیرمجموعه بورل E از $\mathbb{R}$ موجود است که برای هر بازه ناتهی I در $\mathbb{R}$، $0<m(E\cap I)<m(I)$.

۳) هیچ زیر مجموعه کاملاً ناهمبند فشرده از $\mathbb{R}$ اندازه لبگ ناصفر ندارد.

۴) هر زیر مجموعه فشردهٔ $\mathbb{R}$، محمل (تکیه‌گاه) یک اندازه بورل روی $\mathbb{R}$ است.

۴- اگر $E\subseteq[0,1]$، $E\neq[0,1]$ و $m(E)=1$، که m اندازه لبگ است، آنگاه ....

۱) E هر بازهٔ (α,β) را که $0<\alpha<\beta<1$ قطع می‌کند.

۲) E در $[0,1]$ چگال است.

۳) E نمی‌تواند بسته باشد.

۴) هر سه گزینه صحیح است.

۵- اگر $E\subseteq\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $nE=\{nx : x\in E\} \quad (n\in\mathbb{N})$ در مورد $\alpha=m(nE)$ و $\beta=m(E)$، که در آن m اندازه لبگ است، چه می‌توان گفت؟

۱) همواره $\alpha\geq n\beta$ ولی ممکن است تساوی برقرار نباشد.

۲) همواره $\alpha\leq n\beta$ ولی ممکن است تساوی برقرار نباشد.

۳) همواره $\alpha=n\beta$

۴) همواره $\alpha>\beta$

۶- اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و $m(E) = 0$ که در آن m اندازه لبگ باشد، در مورد E چه می‌توان گفت؟

۱) E حداکثر شماراست

۲) E نمی‌تواند بی‌کران باشد.

۳) E نمی‌تواند در $\mathbb{R}$ چگال باشد.

۴) E نمی‌تواند باز باشد ولی می‌تواند بی‌کران باشد.

۷- تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ تقریباً همه جا روی $[0,\infty)$ تعریف شده است. اگر $\alpha = \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx$ انتگرال ریمان ناسره f باشد، آنگاه f ....

۱) انتگرال‌پذیر لبگ است و انتگرال لبگ آن روی $[0,\infty)$ با α برابر است.

۲) انتگرال‌پذیر لبگ نیست ولی α موجود است.

۳) انتگرال‌پذیر لبگ نیست و α موجود نیست.

۴) انتگرال‌پذیر لبگ است ولی α موجود نیست.

۸- اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $\int_0^1 f(x)dx = 1$ (انتگرال لبگ) و $E = \{x \in [0,1] : f(x) > 1\}$، مقدار انتگرال لبگ $\int_E (f(x)-1)dx$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)-1|dx$

۴) $\frac{1}{2} - m(E)$ که m اندازه لبگ است.

۹- اگر $A_n \subseteq [0,1]$ اندازه‌پذیر لبگ و $m(A_n) = \frac{1}{n^2}$، که در آن m اندازه لبگ باشد، در مورد $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ چه می‌توان گفت؟ (χ_A تابع مشخصهٔ A است)

۱) تقریباً همه جا همگراست ولی لزوماً همگرای نقطه‌ای نیست.

۲) ممکن است روی یک مجموعه با اندازه مثبت واگرا باشد.

۳) همگرای نقطه‌ای است ولی لزوماً همگرای یکنواخت نیست.

۴) همگرای یکنواخت است.

۱۰- اگر $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد و $f(x) = \int_a^x g(t)dt \quad (a \le x \le b)$ (انتگرال لبگ) تابع f روی $[a,b]$ ....

۱) اندازه‌پذیر لبگ است ولی لزوماً انتگرال‌پذیر لبگ نیست.

۲) اندازه‌پذیر لبگ است ولی لزوماً پیوسته نیست.

۳) پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۴) پیوسته یکنواخت است.

۱۱- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و $f: X \to [0,\infty]$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد و $E \in M$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $\mu E = 0$ آنگاه $\int_E f\,d\mu = 0$

۲) اگر $f > 0$ روی E، ممکن است $\int_E f\,d\mu = 0$

۳) اگر $f > 0$ روی E، همواره $\int_E f\,d\mu \geq 0$

۴) اگر $\int_E f\,d\mu = 0$ آنگاه $f = 0$ تقریباً همه جا روی E

۱۲- اگر $X = \{1,2,\ldots,n\}$ که $n \in \mathbb{N}$ و μ اندازه شمارشی روی X باشد و $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ $(x \in X)$، مقدار $\int_X f\,d\mu$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{n+1}$

۲) $\frac{1}{n+1}$

۳) $1+\frac{1}{n}$

۴) $1+\frac{n}{n+1}$

۱۳- اگر $f: X \to \mathbb{R}$ تابعی مفروض باشد، آنگاه اگر ....

۱) f اندازه‌پذیر نباشد، $\{x : f(x) = a\}$ برای هیچ $a \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر نیست.

۲) مجموعهٔ $\{x : f(x) = a\}$ برای هر $a \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد، تابع f اندازه‌پذیر است، ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست.

۳) f اندازه‌پذیر باشد، مجموعهٔ $\{x : f(x) = a\}$ برای هر $a \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است، ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست.

۴) f اندازه‌پذیر نباشد، ممکن است $\{x : f(x) = a\}$ برای برخی $a \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد، ولی نمی‌تواند برای هر $a \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد.

۱۴- اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد، آنگاه ....

۱) اگر $|f|$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f و $-f$ هر دو اندازه‌پذیرند، ولی عکس این موضوع برقرار نیست.

۲) اگر f اندازه‌پذیر باشد، $|f|$ نیز اندازه‌پذیر است، ولی عکس این گزاره برقرار نیست.

۳) $|f|$ اندازه‌پذیر است، اگر و فقط اگر توابع f و $-f$ هر دو اندازه‌پذیر باشند.

۴) اندازه‌پذیری f و $|f|$ در حالت کلی هیچیک دیگری را ایجاب نمی‌کند.

۱۵- اگر $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی مفروض باشند، که در آن f اندازه‌پذیر لبگ و g پیوسته است، آنگاه ....

۱) gof، fog هر دو اندازه‌پذیر لبگ هستند.

۲) gof، fog هیچکدام لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیستند.

۳) gof اندازه‌پذیر لبگ است ولی fog لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیست.

۴) fog اندازه‌پذیر لبگ است ولی gof لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیست.

۱۶- کدام گزینه برای تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ نادرست است؟

۱) اگر f یکنوا باشد، اندازه‌پذیر بورل است.

۲) اگر f اندازه‌پذیر بورل باشد، اندازه‌پذیر لبگ است.

۳) اگر f تقریباً همه جا پیوسته باشد، اندازه‌پذیر لبگ است.

۴) اگر f تقریباً همه جا با یک تابع پیوسته برابر باشد، اندازه‌پذیر لبگ است.

۱۷- اگر μ یک اندازه مثبت روی X باشد و $f:X\to[0,\infty]$ اندازه‌پذیر بوده و $\int_X f\,d\mu=c>0$ آنگاه مقدار $I=\lim_{n\to\infty}\int_X n\log(1+(\frac{f}{n})^{\alpha})d\mu$ کدام است؟ ($\alpha\geq 0$ عددی ثابت است)

۱) $I=\infty$ اگر $0<\alpha<1$ و $I=0$ اگر $\alpha=1$ و $I=c$ اگر $1<\alpha<\infty$

۲) $I=\infty$ اگر $0<\alpha<1$، $I=0$ اگر $1<\alpha<\infty$ و $I=c$ اگر $\alpha=1$

۳) $I=c$ اگر $1\leq\alpha<\infty$، $I=\infty$ اگر $0<\alpha<1$

۴) $I=\infty$ اگر $0<\alpha\leq 1$ و $I=c$ اگر $1<\alpha<\infty$

۱۸- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط کراندار و اندازه‌پذیر روی X باشد که $f_n\to f$ بطور یکنواخت روی X، آنگاه ....

۱) همواره $\int_X f_n\,d\mu\to\int_X f\,d\mu$

۲) اگر $\mu X<\infty$ آنگاه $\int_X f_n\,d\mu\to\int_X f\,d\mu$

۳) اگر $X=\mathbb{R}$ و μ اندازه لبگ باشد، $\int_X f_n\,d\mu\to\int_X f\,d\mu$

۴) اگر $X=[0,1]$ و μ اندازه شمارشی باشد، $\int_X f_n\,d\mu\to\int_X f\,d\mu$

۱۹- اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی فضای اندازه (X,M,μ) باشد و (اندازه) $f_n\to f$ (همگرایی در اندازه)، آنگاه ....

۱) $\int_X f\,d\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$

۲) $\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\leq\int_X f\,d\mu\leq\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$

۳) گزینه ۱ برای یک زیر دنباله $\{f_n\}$ صحیح است، ولی لزوماً برای دنباله صحیح نیست.

۴) گزینه ۲ برای یک زیر دنباله $\{f_n\}$ صحیح است، ولی لزوماً برای دنباله صحیح نیست.

۲۰- اگر (اندازه) $f_n\to f$ و (اندازه) $g_n\to g$ (هر دو همگرایی در اندازه است) آنگاه از دو گزاره (اندازه) $f_n+g_n\to f+g$ و (اندازه) $f_ng_n\to f_g$ می‌توان نتیجه گرفت که ....

۱) اولی همواره درست است و دومی در حالتی درست است که اندازه فضا متناهی باشد.

۲) دومی همواره درست است و اولی در حالتی درست است که اندازه فضا متناهی باشد.

۳) هر دو فقط در حالتی درست است که اندازه فضا متناهی باشد.

۴) هر دو درست است.

۲۱- اگر $X=\mathbb{N}$ و M سیگما جبر همه زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و μ اندازه شمارشی بر $\mathbb{N}$ باشد، حکم (اندازه) $f_n \to f$ (همگرایی در اندازه) برای توابع اندازه‌پذیر $f_n : X \to \mathbb{R}$ و تابع اندازه‌پذیر $f : X \to \mathbb{R}$ با کدام گزاره معادل است؟

۱) $f_n \to f$ (یکنواخت)

۲) $f_n \to f$ (نقطه‌ای)

۳) $\sum_{k=1}^{\infty} |f_n(k) - f(k)| \to 0$ هرگاه $n \to \infty$

۴) $f_{n_k} \to f$ (نقطه‌ای) برای یک زیر دنباله (f_{n_k}) از (f_n)

۲۲- حدود

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (1+\frac{x}{n})^{-n} \sin(\frac{x}{n}) dx$$

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx$$

را در نظر بگیرید، کدام گزینه صحیح است؟

۱) چون تابع سینوس نوسانی است α موجود نیست، β موجود و صفر است.

۲) هر دو حد از قضیه همگرایی تسلطی لبگ موجودند و β ناصفر است.

۳) هر دو حد از قضیه همگرایی تسلطی لبگ موجودند و α ناصفر است.

۴) هر دو حد از قضیه همگرایی تسلطی لبگ موجود و صفرند.

۲۳- اگر $f_n : X \to [0,\infty)$ توابعی اندازه‌پذیر بر فضای اندازه (X,M,μ) باشند، تساوی $\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x)$ ....

۱) بنا به لم فاتو فقط در صورتی برقرار است که $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_n \, d\mu$ متناهی باشد.

۲) بنا به قضیه همگرایی تسلطی لبگ فقط در صورتی برقرار است که $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ انتگرال‌پذیر باشد.

۳) بنا به قضیه همگرایی تسلطی لبگ فقط در صورتی برقرار است که $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty$

۴) بنا به قضیه همگرایی یکنوا همواره برقرار است.

۲۴- لم فاتو برای lim sup به جای lim inf به کدام صورت برقرار است؟

۱) به صورت $\int_X (\limsup f_n) d\mu \le \limsup \int_X f_n \, d\mu$ برقرار است.

۲) به صورت $\int_X (\limsup f_n) d\mu \ge \limsup \int_X f_n \, d\mu$ برقرار است.

۳) گزینه (۲) در صورتی برقرار است که f_nها همگی منفی باشند.

۴) گزینه (۱) در صورتی برقرار است که f_nها همگی منفی باشند.

۲۵- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و μ اندازه‌ای مثبت باشد، برای $1 \le r \le p \le s \le \infty$، کدام گزینه همواره صحیح است؟ (فضای $L^p(X,\mu)$ باختصار با $L^p(\mu)$ نشان داده شده است.)

۱) $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu) \cap L^s(\mu)$

۲) $L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subseteq L^p(\mu)$

۳) $L^s(\mu) \subseteq L^r(\mu)$

۴) $L^r(\mu) \subseteq L^s(\mu)$

۲۶- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و $f_n \in L^\infty(X,\mu)$ و f و $f_n \to f\,(a.e)$ (همگرایی تقریباً همه جا) آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ در صورتی که $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

۲) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

۳) $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$

۴) هر سه مورد

۲۷- اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای متعامد در یک فضای هیلبرت H باشد و $x \in H$ و $\langle x_n, x_n\rangle = 1$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، آنگاه برای $I(p) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x\rangle|^p$ داریم ....

۱) $I(p)$ برای هر $p \ge 1$ همگراست.

۲) $\langle x_n, x\rangle \to 0$ ولی $I(2)$ ممکن است واگرا باشد.

۳) $I(2)$ همگراست ولی $I(1)$ ممکن است واگرا باشد.

۴) $I(1)$ همگراست ولی $I(2)$ ممکن است واگرا باشد.

۲۸- اگر H یک فضای هیلبرت و $A \subseteq H$ و $A^\perp = \{y \in H : \langle y, x\rangle = 0 \ (x \in A)\}$ آنگاه ....

۱) $A \supseteq A^{\perp\perp}$ و $A \cup A^\perp = H$ و $A \cap A^\perp = \{0\}$

۲) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ و $A \cap A^\perp = \{0\}$

۳) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ و $A \cup A^\perp = H$

۴) $A^{\perp\perp} = A$

۲۹- اگر X و Y دو فضای نرمدار و $T : X \to Y$ یک تبدیل خطی باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر معادل پیوستگی T نیست؟

۱) T کراندار است.

۲) T در یک نقطه پیوسته است.

۳) T هر مجموعه باز را به یک مجموعه باز می‌نگارد.

۴) T روی یک مجموعه باز ناتهی X پیوسته است.

۳۰- اگر X یک فضای نرم‌دار و B گوی یکه X باشد، کدام گزاره نادرست است؟

۱) اگر $X=C[0,1]$، B محدب اکید (اکیداً محدب) است.

۲) اگر $X=L^{p}(X,\mu)$ $(1<p<\infty)$، B محدب اکید است.

۳) اگر $X=L^{\infty}(X,\mu)$، B محدب اکید نیست.

۴) B همواره محدب است.

آنالیز عددی پیشرفته

۳۱- عدد مساوی $(1/3\overline{43})_{5}$ در مبنای ۱۰ کدام است؟

۱) $\frac{29}{22}$

۲) $\frac{39}{22}$

۳) $\frac{69}{44}$

۴) $\frac{89}{44}$

۳۲- عدد گویای مساوی $3/12\overline{912}$ کدام است؟

۱) $\frac{1042}{333}$

۲) $\frac{1041}{333}$

۳) $\frac{1040}{333}$

۴) $\frac{1039}{333}$

۳۳- فرض کنید $\varphi^{(0)}(a,b,c)=\begin{bmatrix} a+b \\ a-b \end{bmatrix}$ و $\varphi^{(1)}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=u-v$ باشد. مقدار $\left|\varphi^{(1)}o\varphi^{(0)}\right|(a,b,c)$ کدام است؟

۱) a-c

۲) a+c

۳) b-c

۴) b+c

۳۴- اگر $z=\varphi(x,y)=\sqrt{x+y^{2}}-y$ باشد، مسألهٔ محاسبهٔ z به ازای مقادیر مختلف x و y در کدام حالت خوش وضع است؟

۱) $xy>0$

۲) $xy<0$

۳) $x>0$

۴) $y>0$

۳۵- اگر $L_i(x)$ چند جمله‌ای لاگرانژ مبتنی بر نقاط $x_0,\dots,x_n$ باشد، بـرای تـابع جدولی زیر $L_2(x)$ کدام است؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	-1	-1	1	5

۱) $\frac{x^{3}+x^{2}}{2}$

۲) $\frac{x^{3}-x^{2}-2x}{2}$

۳) $2x^{3}-x^{2}+3$

۴) $\frac{2x+x^{2}-x^{3}}{2}$

۳۶- درجه چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی سؤال (۳۵) کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۷- برای تابع جدولی زیر مقدار $P_{۱۲}(۲)$ کدام است؟ ($p_{i_۰ i_۱ \dots i_k}$ از روش نویل موردنظر است.)

x_i	۱-	۱	۳
f_i	۲	۳	۱

۱) ۱-

۲) ۰

۳) ۱

۴) ۲

۳۸- برای تابع جدولی سؤال (۳۷) مقدار $P_{۰۱۲}(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱۳}{۸}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۱۹}{۸}$

۳۹- برای تابع جدولی سؤال (۳۷) مقدار $f_{۰۱۲}$ کدام است؟ (منظور از $f_{i_۰ i_۱ \dots i_k}$ تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن است.)

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $-\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۴۰- فرض کنید $a = x_۰ < x_۱ < \dots < x_n = b$، $h_i = x_{i+۱} - x_i$ ، $i = ۰, \dots, n$ ، f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد و $p_n(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_۰, \dots, x_n$ باشد. در کدام حالت برای هر x از $[a,b]$ رابطه زیر برقرار است؟

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)\,?$$

۱) ثابت $m > ۰$ وجود داشته باشد به قسمی که $|f^{(i)}(x)| \le m$ برای هر x از $[a,b]$ و هر i

۲) f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

۳) $[a,b] \subset (۰,۱)$

۴) $h_i \xrightarrow[i\to\infty]{} ۰$

۴۱- فرض کنید:

$f(-۱) = ۲, f'(-۱) = ۸, f(۰) = ۲, f'(۰) = -۱, f(۱) = ۳$ مقدار $f_{۲۳۴}$ کدام است؟ ($f_{i,i+۱,\dots,i+k}$ نماد تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن تعمیم‌یافته است.)

۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۴۲- برای تابع جدولی سؤال (۴۱) مقدار f_{123} کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۰

۴۳- اگر f بر (a,b) تعریف شده باشد در چه صورت از درونیاب کسری برای f استفاده می‌شود؟

۱) $a=-\infty$ ۲) $b=+\infty$

۳) $a=-\infty$ و $b=+\infty$ ۴) f بر (a,b) کراندار نباشد.

۴۴- ویژگی اصلی روش‌های انتگرال‌گیری عددی نیوتن ـ کوتز (Newton-Cotes) کدام است؟

۱) نقاط انتگرال‌گیری معلوم هستند.

۲) نقاط انتگرال‌گیری متساوی‌الفاصله‌اند.

۳) درجه دقت روش انتگرال‌گیری مساوی تعداد نقاط آن است.

۴) نقاط ابتدا و انتهای بازه انتگرال‌گیری جزء نقاط فرمول انتگرال‌گیری عددی هستند.

۴۵- اگر تعریف کنیم $h=x_{i+1}-x_i$ و $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})+\frac{h^2}{12}(f'_i-f'_{i+1})$ تقریبی از $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ که در آن $x_0=a$ و $x_n=b$، کدام است؟

۱) $T(h)-\frac{h^2}{12}(f'(a)-f'(b))$ ۲) $T(h)-\frac{h^2}{12}(f(a)-f(b))$

۳) $T(h)+\frac{h^2}{12}(f'(a)-f'(b))$ ۴) $T(h)+\frac{h^2}{12}(f(a)-f(b))$

۴۶- خطای قاعده زیر کدام است؟ ($T(h)=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n)$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h)+\frac{h^2}{12}(f'(a)-f'(b))$$

۱) $-\frac{h^3}{12}f''(\eta)$ ، که $\eta\in[a,b]$

۲) $-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$ ، که $\eta\in[a,b]$

۳) $-\frac{b-a}{720}h^4 f^{(4)}(\eta)$ ، که $\eta\in[a,b]$

۴) $-\frac{(b-a)}{720}h^5 f^{(4)}(\eta)$ ، که $\eta\in[a,b]$

۴۷- فرض کنید:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h)+\frac{h^2}{12}(f'(a)-f'(b))\ ,\ [a,b]=[0,\pi]$$ در کدام حالت

خطای $T(h)$ برابر $O(h^4)$ است؟

۱) $f(x)=\sin x$ ۲) $f(x)=x+\cos x$

۳) $f(x)=x+\sin x$ ۴) $f(x)=x^2+\sin x$

۴۸- برای کدام یک از قواعد گاوس تمام وزن‌های آن قاعده یکسان هستند؟

۱) قاعده گاوس ـ ژاکوبی باز   ۲) قاعده گاوس ـ لژاندر باز

۳) قاعده گاوس ـ چبیشف باز   ۴) قاعده گاوس ـ چبیشف بسته

۴۹- نقاط قاعده انتگرال‌گیری گاوس n نقطه‌ای کدام است؟

۱) $x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ، $k=1,\dots,n$

۲) $x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ ، $k=1,\dots,n$

۳) $x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}$ ، $k=1,\dots,n$

۴) $x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ ، $k=0,1,\dots,n-1$

۵۰- فرمول انتگرال‌گیری گاوس بسته‌ی n نقطه‌ای برای چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر .... دقیق است.

۱) $2n-3$ ۲) $2n-2$

۳) $2n-1$ ۴) $n+1$

۵۱- کدام حکم در مورد صفرهای چند جمله‌ای‌های متعامد بر $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ کاملاً درست است؟

۱) صفرهای $p_n(x)$ ساده و حقیقی‌اند.

۲) صفرهای $p_n(x)$ به $[a,b]$ تعلق دارند.

۳) صفرهای $p_n(x)$، n عدد دوبدو متمایزند.

۴) صفرهای $p_n(x)$ به (a,b) تعلق دارند و ساده‌اند.

۵۲- فرض کنید $p_0(x)=1$ و $\int_0^1\frac{p_0(x)p_1(x)}{\sqrt{x}}dx=0$ چند جمله‌ای $p_1(x)$ کدام است؟

۱) x ۲) $x-\frac{1}{2}$

۳) $x-\frac{1}{3}$ ۴) $x-\frac{1}{4}$

۵۳- کدام ویژگی قواعد گاوس باعث می‌شود که این قواعد از نظر عددی پایدار باشند؟

۱) قرینه بودن نقاط نسبت به مبدأ

۲) کوچک بودن وزن‌های قواعد گاوس

۳) مثبت بودن وزن‌های قواعد گاوس

۴) قرار گرفتن نقاط قواعد گاوس در $(-1,1)$

۵۴- می‌دانیم که قاعده نقطه‌ی میانی به قرار زیر است:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a) f(\frac{a+b}{۲})$$

این قاعده مطابق با کدام قاعده گاوس است؟

۱) گاوس ـ لاگر (Gauss-Lagurre) ۲) گاوس ـ هرمیت

۳) گاوس ـ چبیشف ۴) گاوس ـ لژاندر یک نقطه‌ای

۵۵- نقاط قاعده انتگرال‌گیری گاوس ـ چبیشف سه نقطه‌ای کدامند؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}$ ۴) $-۱, ۰, ۱$

۵۶- اگر $x=(x_۱, x_۲)$، $f(x)=\begin{bmatrix} x_۱^۲-۳x_۲ \\ ۱-x_۱+x_۲^۲ \end{bmatrix}$ و $x_۰=(۱,-۲)$ باشد، آنگاه $Df(x_۰)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۱ & -۴ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$

۵۷- در روش نیوتن می‌دانیم که $x_{k+1}=x_k-(Df(x_k))^{-1}f(x_k)\ ,\ k=۰,۱,...$ (*) است. با داشتن x_k، x_{k+1} چگونه به دست می‌آورید؟

۱) دستگاه $(Df(x_k))y_k=f(x_k)$ را حل می‌کنیم.

۲) دستگاه $(Df(x_k))x_{k+1}=(Df(x_k))x_k-f(x_k)$ را حل می‌کنیم.

۳) دستگاه $(Df(x_k))y_k=f(x_k)$ را حل می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x_{k+1}=y_k+x_k$

۴) معکوس ماتریس $Df(x_k)$ را به دست می‌آوریم و بعد از (*) بردار x_{k+1} را حساب می‌کنیم.

۵۸- فرض کنید $a=۲$، $p_۳(x)=-۱$ و $p_۲(x)=۴x-۱$ و $p_۱(x)=۱-x^۲$ و $p_۰(x)=x^۳-۳x+۱$ مقدار $w(a)$ کدام است؟ ($w(a)$ تعداد تغییر علامات در دنباله $\{P_i(a)\}_{i=۰}$ است.)

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۵۹- یکی از کاربردهای مهم دنباله ستورم کدام است؟

۱) تعیین مقادیر ویژه ماتریس‌های سه قطری متقارن

۲) تعیین صفرهای چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس

۳) تعیین صفرهای چند جمله‌ای همراه یک ماتریس

۴) تعیین صفرهای چند جمله‌ای‌های زوج

۶۰- روش بیرستو (Bairstow's Method) .... را می‌دهد.

۱) تمام صفرهای حقیقی یک چند جمله‌ای

۲) صفرهای یک چند جمله‌ای با ضرایب مختلط

۳) باقیمانده تقسیم یک چند جمله‌ای بر یک عبارت درجه دوم

۴) صفرهای مختلط یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی