776F

776

F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

# آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور



## رشته‌ی آمار ریاضی کد (۱۷۲)

تعداد سؤال: ۶۰

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | استنباط آماری (۱) | ۳۰ | ۱ | ۳۰ |
| ۲ | آنالیز ریاضی (۲) | ۳۰ | ۳۱ | ۶۰ |

آذر ماه سال ۱۳۹۲

نمره منفی ندارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره‌ی بسنده و کامل برای $\theta$ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \exp\{-(x-\theta) + e^{-(x-\theta)}\} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

۱) $\sum_{i=1}^{n} X_i$

۲) $\sum_{i=1}^{n} e^{X_i}$

۳) $\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}$

۴) $\sum_{i=1}^{n} e^{e^{-X_i}}$

۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و $X_i$ دارای توزیع پواسون با پارامتر مجهول $\lambda\mu^{i-1} > 0$، $i = 1, \dots, n$ باشد. آماره‌ی بسنده برای زوج $(\mu, \lambda)$ کدام است؟

۱) $(\sum_{i=1}^{n} X_i , \sum_{i=1}^{n} iX_i)$

۲) $(\sum_{i=1}^{n} iX_i , \sum_{i=1}^{n} X_i^2)$

۳) $(\prod_{i=1}^{n} X_i , \sum_{i=1}^{n} iX_i)$

۴) $(\bar{X} , S^2)$

۳- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر گشتاوری $\theta$ کدام است؟



$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} \quad , -\infty < x < +\infty \, , \, \theta > 0$$



۱) $\bar{X}$

۲) $\frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{n}$

۳) $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$

۴) $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}}$

۴- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی $E(\mu, \theta)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ و $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$، برآوردگر گشتاوری $(\mu, \sigma)$ کدام است؟

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{\sigma}(x-\mu)} \quad , \quad x > \mu \text{ و } \sigma > 0$$

۱) $\tilde{\mu} = \bar{X} - S^2 \, , \, \tilde{\sigma} = S^2$

۲) $\tilde{\mu} = \bar{X} - S \, , \, \tilde{\sigma} = S$

۳) $\tilde{\mu} = \bar{X} + S \, , \, \tilde{\sigma} = S^2$

۴) $\tilde{\mu} = \bar{X} \, , \, \tilde{\sigma} = S$

۵- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی $e^{\frac{1}{\theta}}$ کدام است؟

$$f_\theta(x)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}\ ,\ x>0\ ,\ \theta>0$$

۱) $\prod_{i=1}^{n}(1+X_i)^{\frac{1}{n}}$

۲) $\prod_{i=1}^{n}(1+X_i)^{-n}$

۳) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$

۴) $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)}$

۶- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر $\theta\ge a$، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی $\theta$ کدام است؟

$$f_\theta(x)=\theta e^{-\theta x}\ ,x>0 \qquad (a>0 \text{ و معلوم})$$

۱) $\hat\theta=\begin{cases}\frac{1}{\bar x} & a\bar x\ge 1\\ a & a\bar x<1\end{cases}$

۲) $\hat\theta=\begin{cases}\frac{1}{\bar x} & a\bar x\le 1\\ a & a\bar x>1\end{cases}$

۳) $\hat\theta=\begin{cases}\bar x & \bar x\ge a\\ a & \bar x<a\end{cases}$

۴) $\hat\theta=\begin{cases}\bar x & \bar x\le 1\\ a & \bar x>a\end{cases}$

۷- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. اگر $c(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ و $u(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$، برآورد ماکزیمم درستنمایی $\theta$ کدام است؟ $(0<\theta<1)$

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta & x=-1\\ (1-\theta)^2\theta^x & x=0,1,2,\dots\end{cases}$$

۱) $\frac{\sum_{i=1}^{n}c(x_i)+\sum_{i=1}^{n}x_i u(x_i)}{n(\bar x+2)}$

۲) $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i c(x_i)+\sum_{i=1}^{n}u(x_i)}{n(\bar x+2)}$

۳) $\frac{\sum_{i=1}^{n}c(x_i+1)+\sum_{i=1}^{n}x_i u(x_i)}{n(\bar x+2)}$

۴) $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i c(x_i+1)+\sum_{i=1}^{n}u(x_i)}{n(\bar x+2)}$

۸- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت $U(0,\theta)$ است و $T(X_1,\dots,X_n)=(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\frac{1}{n}}$. گزینه صحیح کدام است؟

۱) T آماره‌ای سازگار برای $\theta e^{-1}$ است.

۲) T آماره‌ای سازگار برای $\frac{1}{\theta}e^{-1}$ است.

۳) T آماره‌ای سازگار برای $\theta$ است.

۴) T آماره‌ای سازگار برای $\frac{1}{\theta}$ است.

۹- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت در فاصله $(\theta,\theta+1)$ باشد. اگر $X_{(1)}=\min(X_1,\dots,X_n)$، $X_{(n)}=\max(X_1,\dots,X_n)$ و $T=(X_{(1)},X_{(n)})$، $E(\overline{X}\mid T)$ کدام است؟

۱) $\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$

۲) $\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}-1$

۳) $\frac{X_{(1)}+X_{(n)}-1}{2}$

۴) $\frac{X_{(1)}+X_{(n)}+1}{2}$

۱۰- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. برآوردگر نااریب صفر کدام است؟

| x | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| $f_\theta(x)$ | $\theta$ | $3\theta$ | $1-4\theta$ |



۱) $h(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ a & x=1\\ -3a & x=2\end{cases}$

۲) $h(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ -3a & x=1\\ a & x=2\end{cases}$

۳) $h(x)=\begin{cases}a & x=0\\ -3a & x=1\\ 0 & x=2\end{cases}$

۴) $h(x)=\begin{cases}-3a & x=0\\ a & x=1\\ 0 & x=2\end{cases}$

۱۱- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(\theta\,,\,\theta+1)$ باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $X-\frac{1}{2}$ برآوردگری نااریب برای $\theta$ است اما دارای کمترین واریانس نیست.

۲) $X-\frac{1}{2}$ برآوردگری نااریب برای $\theta$ با واریانس بطور یکنواخت مینیمم (UMVU) است.

۳) $X-\frac{1}{2}$ برآوردگری نااریب برای $\theta$ است اما بسنده نیست.

۴) X یک آماره‌ی بسنده و کامل برای $\theta$ است.

۱۲- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. کدام یک از توابع پارامتری زیر دارای برآوردگر ناریب با واریانس مساوی کران پایین کرامر ـ رائو (CRLB) است؟

$$f_\theta(x)=\theta x^{\theta-1}\ ,\ 0<x<1\ \text{و}\ \theta>0$$

۱) $\frac{\theta-1}{\theta^2}$
۲) $\frac{\theta-1}{\theta}$
۳) $\frac{\theta}{\theta-1}$
۴) $\theta$

۱۳- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره فرعی (کمکی) برای این خانواده کدام است؟

$$f_{\theta_1,\theta_2}(x)=\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{1}{\theta_2}(x-\theta_1)}\ ,\ x>\theta_1\ ,\ \theta_2>0$$

۱) $\frac{X}{\sum(X_i-X_{(1)})}$
۲) $X_{(n)}-X_{(1)}$
۳) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})$
۴) $\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{\sum(X_i-X_{(1)})}$

۱۴- فرض کنید $X_i\sim N(\theta,\sigma_i^2)$ ، $i=1,2,\dots,n$، متغیرهای تصادفی مستقل باشند که در آن $\sigma_i$ ها معلوم هستند. اگر تعریف کنیم $\delta(X)=\sum a_iX_i$ برای اینکه $\delta(X)$ بهترین برآورد کنندهٔ ناریب با کمترین واریانس برای $\theta$ باشد، مقدار $a_i$ کدام است؟



۱) $a_i=\frac{1}{n}$
۲) $a_i=\frac{1}{\sigma_i^2}$
۳) $a_i=\frac{n}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}}$
۴) $a_i=\frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$

۱۵- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد، که در آن $n>2$ است. UMVUE پارامتر $\Phi(x_0-\theta)$ کدام است؟
[$x_0$ مقدار معلوم و $\Phi$، تابع توزیع تجمعی $N(0,1)$ است.]

۱) $\Phi\left(\frac{x_0-\bar{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)$
۲) $\Phi\left(\frac{x_0-\bar{X}}{\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}}\right)$
۳) $\Phi\left(\frac{x_0-\bar{X}}{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}\right)$
۴) $\Phi(x_0-\bar{X})$

۱۶- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر UMVU پارامتر $3^{-\theta}$ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}\ ,\ 0 < x < 1$$

۱) $\left(1+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}{\ln 3}\right)^{n-1}$

۲) $\left(1+\dfrac{\ln 3}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\right)^{n-1}$

۳) $\left(1+\dfrac{3}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\right)^{n-1}$

۴) $\left(1+3\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^{n-1}$

۱۷- فرض کنید $X_1,\dots,X_m$ و $Y_1,\dots,Y_n$ نمونه‌های تصادفی مستقل از یکدیگر با توزیع‌های به ترتیب نمایی با میانگین $\dfrac{1}{\lambda}$ و نمایی با میانگین $\dfrac{1}{\lambda\theta}$ باشند. برآوردگر UMVU پارامتر $\theta$ کدام است؟

۱) $\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\sum_{j=1}^{n}Y_j}{\sum_{i=1}^{m}X_i}$

۲) $\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{m}X_i}{\sum_{j=1}^{n}Y_j}$

۳) $\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\sum_{j=1}^{n}Y_j}{\sum_{i=1}^{m}X_i}$

۴) $\dfrac{n-1}{m}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{m}X_i}{\sum_{j=1}^{n}Y_j}$



۱۸- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشد. تحت تابع زیان مربع خطا، کدام یک از توزیع‌های پیشین زیر برآوردکننده بیزی نظیر برآوردکنندهٔ ماکسیمم درستنمایی را بدست می‌دهد؟

$$P_\theta(X=x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}\ ,\ x=0,1$$

۱) $\pi(\theta)=1$

۲) $\pi(\theta)=\dfrac{1}{\theta(1-\theta)}$

۳) $\pi(\theta)\propto\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}$

۴) $\pi(\theta)\propto\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$

۱۹- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0,\theta)$ باشد. اگر $\eta=\frac{1}{\theta}$ و توزیع پیشین $\eta$ نمایی با میانگین ۲ را در نظر بگیریم، تحت تابع زیان $L(\theta,\delta)=\frac{(\delta-\theta)^2}{\delta^2}$ برآوردگر بیز پارامتر $\theta$ کدام است؟ ($n>2$)

۱) $\frac{n-2}{4(\sum X_i^2+1)}$

۲) $\frac{1+\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n-3}$

۳) $\frac{4}{(n-2)(\sum X_i^2+1)}$

۴) $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2+1}{n-2}$

۲۰- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع هندسی با تابع احتمال زیر باشد. اگر توزیع پیشین برای $\theta$ توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ و تابع زیان $L(\theta,\delta)=\frac{\theta^2}{1-\theta}(\delta-\theta)^2$ باشد، برآورد بیز $\frac{1-\theta}{\theta}$ کدام است؟

$$f(x\mid\theta)=\theta(1-\theta)^x \quad , \; x=0,1,2,\dots$$

۱) $\frac{n\bar{x}}{n+1}$

۲) $\frac{n\bar{x}}{n+2}$

۳) $\frac{n\bar{x}-1}{n+1}$

۴) $\frac{n\bar{x}-1}{n+2}$



۲۱- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ باشد. تحت پیشین Gamma (۱و۱) و تابع زیان $L(\theta,\delta)=\frac{\delta}{\theta}-\text{Ln}\frac{\delta}{\theta}-1$، برآورد بیز پارامتر $\theta$ کدام است؟

۱) $x+1$

۲) $\frac{x+1}{2}$

۳) $\frac{1}{x+1}$

۴) $\frac{2}{x+1}$

۲۲- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0,\theta)$ باشد. اگر $\tau=\frac{1}{\theta}$ و توزیع پیشین نمایی با میانگین ۲ را برای $\tau$ در نظر بگیریم، برآوردگر بیز پارامتر $\theta$ تحت تابع زیان $L(\theta,\delta)=\frac{(\delta-\theta)^2}{\theta^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1+\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n+4}$

۲) $\frac{1+\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$

۳) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

۴) $\frac{1}{n+4}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

۲۳- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد و $\theta$ دارای توزیع پیشین $N(0,\sigma^2)$ باشد، که در آن $\sigma$ معلوم است. تحت تابع زیان $L(\theta,\delta)=e^{a(\delta-\theta)}-a(\delta-\theta)-1$ برآورد بیز پارامتر $\theta$ کدام است؟ $(a\neq 0)$

۱) $\frac{n\bar{x}}{n\sigma^2+1}$

۲) $\frac{n\sigma^2\bar{x}}{n\sigma^2+1}$

۳) $\frac{n\sigma^2}{n\sigma^2+1}(\bar{X}-\frac{a}{2n})$

۴) $\frac{n\sigma^2}{n\sigma^2+1}(\bar{X}+\frac{a}{2n})$

۲۴- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر $\theta$ باشد. تحت تابع زیان $L(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^2$ برآوردگر مینیماکس پارامتر $\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\sum X_i+\frac{\sqrt{n}}{2}}{n+\sqrt{n}}$

۲) $\frac{\bar{X}+\frac{\sqrt{n}}{2}}{n+\sqrt{n}}$

۳) $\frac{\sum X_i+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

۴) $\frac{\bar{X}+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

۲۵- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\sigma(x)=\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi x^3}}\ e^{-\frac{\sigma}{2x}}\quad,\quad x>0\ ,\ \sigma>0$$

تحت تبدیل $y_i=cx_i$ ، $i=1,\dots,n$ ، کدام یک از برآوردگرهای زیر برای $\sigma$ پایا (Invaraint) است؟

۱) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

۲) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}$

۳) $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$

۴) $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$

۲۶- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی دو پارامتری $E(\theta,b)$ باشد که b مقدار معلوم است. تحت تابع زیان توان دوم خطا بهترین برآوردگر پایای (Invaraint) پارامتر $\theta$ کدام است؟

۱) $X_{(1)}-\frac{b}{n}$

۲) $X_{(1)}+\frac{b}{n}$

۳) $X_{(1)}-\frac{n}{b}$

۴) $X_{(1)}+\frac{n}{b}$

۲۷- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0,\sigma^2)$ باشد. یک برآوردگر پایا برای $\sigma^2$ با کمترین میانگین توان دوم خطا (MSE)، تحت گروه تبدیل‌های زیر کدام است؟

$$\varphi=\{g_c(x_1,\dots,x_n)=(cx_1,\dots,cx_n)\,|\,c>0\}$$

۱) $s^2$

۲) $\frac{1}{n}\sum X_i^2$

۳) $\frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

۴) $\frac{n-1}{n+2}s^2$

۲۸- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda$ باشد. اگر $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$، مقدار $\mathrm{cov}(\overline{X},S^2)$ کدام است؟

۱) $\lambda$

۲) $\lambda^2$

۳) $\frac{\lambda}{n}$

۴) $\frac{\lambda^2}{n}$

۲۹- اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد، تابع چگالی احتمال $Y=\dfrac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$ کدام است؟

۱) $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{n}\,Be(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}(1+\dfrac{y^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}\ ,\ -\infty<y<+\infty$

۲) $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{n-1}\,Be(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2})}(1+\dfrac{y^2}{n-1})^{-\frac{n}{2}}\ ,\ -\infty<y<+\infty$

۳) $f(y)=\dfrac{1}{Be(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}(1-y^2)^{\frac{n-2}{2}}\ ,\ |y|\le 1$

۴) $f(y)=\dfrac{1}{Be(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2})}(1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\ ,\ |y|\le 1$

۳۰- فرض کنید متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع نمایی با میانگین یک باشد. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=X-[X]$ کدام است؟ ($[X]=$ جزء صحیح $X$)

۱) $f(y)=\dfrac{2e^{-2y}}{1-e^{-2}}\ ,\ 0<y<1$

۲) $f(y)=\dfrac{e^{-y}}{1-e^{-1}}\ ,\ 0<y<1$

۳) $f(y)=2y\ ,\ 0<y<1$

۴) $f(y)=3y^2\ ,\ 0<y<1$



آنالیز ریاضی (۲)

۳۱- اگر $\alpha$ تابعی اکیداً صعودی و $f:[a,b]\to[0,\infty)$ نسبت به $\alpha$ انتگرال‌پذیر باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $f$ بر مجموعه‌ای با اندازه ناصفر مثبت باشد، آنگاه $\int_a^b f d\alpha>0$

۲) اگر $f$ بر زیر بازه بازی از $[a,b]$ مثبت باشد، آنگاه $\int_a^b f d\alpha>0$

۳) اگر $\int_a^b f d\alpha>0$ آنگاه $f$ بر مجموعه‌ای با اندازه ناصفر مثبت است.

۴) اگر $\int_a^b f d\alpha>0$ آنگاه $f$ بر زیر بازه‌ی بازی از $[a,b]$ مثبت است.

۳۲- فرض کنید $A=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$ و $B=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^{2}}dx$. در این صورت کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) انتگرال متناظر با A مطلقاً همگراست.

۲) A و B متناهی و با هم برابر هستند.

۳) انتگرال‌های متناظر با A و B هر دو مطلقاً همگرا هستند.

۴) هیچکدام از انتگرال‌های متناظر با A و B مطلقاً همگرا نیستند.

۳۳- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) $\int_{1}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$

۲) $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx < \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}dx$

۳) $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx > \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}dx$

۴) $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{x+n\pi}dx$

۳۴- تابع f بر بازه‌ی $[0,1]$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\sin^{2}\frac{1}{x} & x\notin Q\\ 0 & x\in Q\end{cases}$$



در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $f\in R$

۲) $\sqrt{f}\notin R$

۳) تابع f در نقاط اصم بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است.

۴) تابع f در نقاط گویای بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است.

۳۵- فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار و $\alpha$ تابعی حقیقی مقدار و مشتق‌پذیر روی بازه $[a,b]$ باشد و به ازای هر $x\in[a,b]$، $F(x)=\int_{a}^{x}f(t)d\alpha(t)$. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) اگر تابع $\alpha$ صعودی اکید باشد آنگاه تابع F نیز صعودی اکید است.

۲) اگر تابع $\alpha$ صعودی باشد آنگاه تابع F نیز صعودی است.

۳) در حالت کلی گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح نیست.

۴) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح است.

۳۶- کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{2n+1}=\pi$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=2\ln 2$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1$

۳۷- مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}k}$ برابر کدام یک از موارد زیر است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\infty$

۳) $\operatorname{Ln}2$

۴) $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})$

۳۸- بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n}{2^{\sqrt{n}}}$ کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}]$

۲) $[-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$

۳) $[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}]$

۴) $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$

۳۹- سری $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^{n!}$ بر کدام مجموعه همگراست؟

۱) $\{0\}$

۲) $(-1,1)$

۳) $(-\infty,+\infty)$

۴) $\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$



۴۰- می‌دانیم که $|x|<1$ $\operatorname{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$ می‌باشد.
شعاع‌های همگرایی بسط سری تیلور این تابع حول نقطه‌های $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{4}$ را به ترتیب $r_2$، $r_3$ و $r$ می‌نامیم. کدام رابطه درست است؟

۱) $r<r_3<r_2$

۲) $r<r_2<r_3$

۳) $r_2<r_3<r$

۴) $r_3<r<r_2$

۴۱- فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0,\pi]$ باشد، از کدام گزینه نمی‌توان نتیجه گرفت که f متحد با صفر است؟

۱) $\int_0^{\pi}[x^n]f(x)dx=0 \quad \forall n\geq 0$

۲) $\int_0^{\pi}e^{nx}f(x)dx=0 \quad \forall n\geq 0$

۳) $\int_0^{\pi}\cos^n x\, f(x)dx=0 \quad \forall n\geq 0$

۴) $\int_0^{\pi}\cos nx\, f(x)dx=0 \quad \forall n\geq 0$

محل انجام محاسبات

۴۲- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر $X$ باشد، به طوری که، $f_n$ نقطه‌وار به $f$ همگرا و $\{f_n\}$ نزولی باشد $(\forall x \in X ; f_{n+1}(x) \leq f_n(x))$. کدام یک از شرایط زیر ایجاب می‌کند که $\{f_n\}$ بطور یکنواخت بر $X$ به $f$ همگرا باشد؟

۱) $f$ پیوسته باشد.
۲) $X$ فشرده باشد.
۳) $f$ پیوسته و $X$ همبند باشد.
۴) $f$ پیوسته و $X$ فشرده باشد.

۴۳- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد دنباله توابع

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$$

بر بازه $[0,1]$ صحیح است؟

۱) دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طور یکنواخت به صفر همگرا نیست و $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$

۲) دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طور یکنواخت به صفر همگرا نیست و $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$

۳) دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طور یکنواخت به صفر همگرانیست و $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = +\infty$

۴) دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طور یکنواخت به صفر همگرا است.

۴۴- کدام یک از سری‌های زیر همگرای یکنواخت است؟

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2(1+nx^2)}$ بر $R$
۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ بر $R$

۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin nx}{\sqrt{n}}$ بر $[0,1]$
۴) هر سه مورد



۴۵- تساوی $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ در کدام مورد برقرار است؟

۱) $0 \leq x \leq 1$ ، $f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^n}$ ، $a = 0$

۲) $0 \leq x \leq 2$ ، $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ ، $a = 1$

۳) $0 \leq x \leq 1$ ، $f_n(x) = x^n$ ، $a = 1$

۴) $x \geq 0$ ، $f(x) = x^2 e^{-nx}$ ، $a = 2$

۴۶- دنباله $f_n : [a,b] \to R$ از توابع را در نظر بگیرید:
فرض کنید بر $[a,b]$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. اگر این همگرایی یکنواخت باشد، آنگاه کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟

۱) اگر به ازای هر $n$، $f_n$ پیوسته باشد، $f$ نیز پیوسته است.
۲) اگر به ازای هر $n$، $f_n$ مشتق‌پذیر باشد، $f$ نیز مشتق‌پذیر است.
۳) اگر به ازای هر $n$، $f_n$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، $f$ نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.
۴) اگر به ازای هر $n$، $f_n$ مشتق‌پذیر باشد و همگرایی $\{f'_n\}$ یکنواخت باشد، آنگاه $f$ نیز مشتق‌پذیر است.

۴۷- فرض کنید T مجموعه‌ی مقادیری از $\alpha$ باشد، که دنباله‌ی $\{f_n\}$ با ضابطه‌ی $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^\alpha}$ به طور یکنواخت بر بازه‌ی $[0,\infty)$ همگرا باشد. در این صورت T برابر با کدام بازه‌ی زیر است؟

۱) $(1,2)$
۲) $[1,2)$
۳) $[1,\infty)$
۴) $[1,2]$

۴۸- همگرایی کدام دنباله بر مجموعه داده شده یکنواخت است؟

۱) $g_n(x)=e^{-nx}\ ,\ x\in[0,\infty)$
۲) $k_n(x)=xe^{-nx}\ ,\ x\in[0,\infty)$
۳) $f_n(x)=x^n\ ,\ x\in[0,1]$
۴) $h_n(x)=(x+\frac{1}{n})^2\ ,\ x\in\mathbb{R}$

۴۹- در مورد دنباله توابع $f_n:[0,1]\to R$

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ -n^2(x-\frac{2}{n}) & \frac{1}{n}\le x\le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

کدام گزاره درست است؟

۱) $\int_0^1 \lim f_n(x)dx=0$
۲) $\lim\int_0^1 f_n(x)dx=0$
۳) $\lim\int_0^1 f_n(x)dx=2$
۴) $\{f_n\}$ بر $[0,1]$ همگرای یکنواخت است.

۵۰- فرض کنید $\Gamma$ نمایش تابع گاما باشد که با ضابطه‌ی $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ بر بازه‌ی $(0,\infty)$ تعریف می‌شود و $\beta$ نمایش تابع بتا باشد که بر $(0,\infty)\times(0,\infty)$ با ضابطه‌ی $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ تعریف می‌شود. در این صورت کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) تابع $\log\Gamma(x)$ محدب است و $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
۲) $\Gamma(x+y)\beta(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)$ $(0<y\ ,\ 0<x)$
۳) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{(\frac{x}{e})^x\sqrt{2\pi x}}=1$
۴) همه‌ی گزینه‌ها درست هستند.

۵۱- با فرض $x \geq 0$ اگر $A = \lim_{x \to \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x}$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A = +\infty$
۲) $A = 1$
۳) $A = 0$
۴) مقدار $A$ به $x$ بستگی دارد.

۵۲- گوییم تابع $f$ بر بازه‌ی $[a,b]$ در شرط یکنواخت لیپ شیتس از مرتبه‌ی $\alpha > 0$ صدق می‌کند اگر $M > 0$ موجود باشد، به طوری که برای هر $x,y \in [a,b]$ داشته باشیم $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) تابعی مانند $f$ یافت می‌شود که در شرط یکنواخت لیپ شیتس از مرتبه‌ی $\alpha < \frac{1}{2}$ صدق می‌کند ولی با تغییر کراندار نیست.
۲) اگر $f$ در شرط یکنواخت لیپ شیتس از مرتبه‌ی $\alpha = 1$ صدق کند آنگاه $f$ با تغییر کراندار است.
۳) اگر $f$ در شرط یکنواخت لیپ شیتس از مرتبه‌ی $\alpha > 1$ صدق کند، آنگاه $f$ تابعی ثابت است.
۴) اگر $f$ با تغییر کراندار باشد آنگاه $\alpha > 0$ موجود است که $f$ در شرط یکنواخت لیپ شیتس از مرتبه‌ی $\alpha$ صدق می‌کند.

۵۳- تابع $f$ را بر $[a,b]$ پیوسته‌ی مطلق می‌نامیم در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ یافت شود به طوری که برای هر تعداد متناهی از زیر بازه‌های جدا از هم $(a_k,b_k)$، اگر $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ آنگاه $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$. در این صورت کدام یک از موارد زیر درست است؟

۱) اگر $f$ پیوسته‌ی مطلق باشد ممکن است با تغییر کراندار نباشد.
۲) اگر $f$ با تغییر کراندار و مشتق‌پذیر باشد، پیوسته‌ی مطلق است.
۳) ممکن است $f$ با تغییر کراندار و پیوسته باشد، ولی پیوسته‌ی مطلق نباشد.
۴) اگر $f$ در شرط لیپ شیتس مرتبه‌ی اول صدق کند ممکن است پیوسته‌ی مطلق نباشد.

۵۴- با مفروض بودن تابع $f:[a,b] \to [a,b]$ و تابع صعودی $\alpha:[a,b] \to \mathbb{R}$، کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) اگر $f \in R(\alpha)$ آنگاه $fof \in R(\alpha)$
۲) اگر $f \in R$ آنگاه $fof \in R$
۳) در حالت کلی گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح نیست.
۴) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح است.

۵۵- فرض کنید $f_n(x) = \begin{cases} \cos^۲ \frac{۲\pi}{x} & \frac{۱}{n+۱} \leq x \leq \frac{۱}{n} \\ ۰ & x < \frac{۱}{n+۱} \text{ یا } \frac{۱}{n} < x \end{cases}$. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\{f_n\}$ به تابع پیوسته‌ای همگراست ولی همگرایی یکنواخت نیست.

۲) $\{f_n\}$ به تابع ناپیوسته‌ای همگراست ولی همگرایی یکنواخت است.

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n$ همگرای یکنواخت است.

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n$ همگرای یکنواخت نیست.

۵۶- فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد و $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$.

آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $M^۲ = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{۱}{n}}$

۲) $\sqrt{M} = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \int_a^b f^{۲n}(x)dx \right)^{\frac{۱}{n}}$

۳) $M^۲ = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \int_a^b f^{۲n}(x)dx \right)^{\frac{۱}{n}}$

۴) $M = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{۱}{n^۲}}$

۵۷- اگر $\alpha(x) = sgn(x) - Ln(x^۲+۱)$ و g تابعی پیوسته بر $[-۱,۱]$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-۱}^{۱} g(Ln \frac{n+۱}{n(x^۲+۱)})d\alpha$ برابر کدام یک از موارد زیر است؟

۱) $۲g(۰) + ۲\int_۰^{Ln۲} g(x)dx$

۲) $g(۰) + ۲\int_۰^{Ln۲} g(x)dx$

۳) $۲g(۰) + \int_{-۱}^{۱} g(x)dx$

۴) $g(۰) + \int_{-۱}^{۱} g(x)dx$

۵۸- با مفروض بودن تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دنباله‌ی $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x)=f(x+\frac{1}{n})$ تعریف می‌کنیم. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر f دارای مشتق کراندار باشد، آنگاه $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f است.

۲) اگر f پیوسته و حد f در بی‌نهایت متناهی باشد، آنگاه $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f است.

۳) اگر f دارای مشتق پیوسته یکنواخت باشد، آنگاه $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f است.

۴) اگر f پیوسته و کراندار باشد، آنگاه $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f است.

۵۹- کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته بر فضای متریک X باشد و بر هر زیر مجموعه‌ی فشرده X همگرای یکنواخت به f باشد، آنگاه f پیوسته است.

۲) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته بر فضای متریک X باشد و بر هر گوی باز X همگرای یکنواخت به f باشد، آنگاه f پیوسته است.

۳) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته بر فضای متریک X باشد که بر یک زیر مجموعه‌ی چگال X همگرای یکنواخت است، آنگاه بر X همگرای یکنواخت است.

۴) هر سه مورد

۶۰- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. در مورد انتگرال $\int_{-1}^{1} f(x)\,d(x[|x|])$ شرط لازم برای وجود انتگرال این است که f ............ پیوسته باشد. در این صورت حاصل انتگرال برابر ............ است.

۱) در ۱ از چپ و در ۱- از راست، $f(1)+f(-1)$

۲) در ۱ از چپ و در ۱- از راست، صفر

۳) در نقاط صحیح، $f(-1)+f(0)+f(1)$

۴) در ۱ و ۱-، $f(1)+f(-1)$