



763

E

نام :  
نام خانوادگی :  
محل امضاء :



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.  
امام خمینی (ره)

**آزمون دانش‌پذیری دوره‌های فراگیر «کارشناسی ارشد» دانشگاه پیام نور**

**رشته‌ی آمار ریاضی (کد ۱۵۸)**

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۶۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	استنباط آماری (۱)	۳۰	۱	۳۰
۲	آنالیز ریاضی (۲)	۳۰	۳۱	۶۰

**آذر ماه سال ۱۳۹۱**

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد:

$$P_\theta(X = -1) = \theta, \quad P_\theta(X = x) = (1-\theta)^x \theta^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

اگر  $N$  نمایانگر تعداد  $X_i$  های مساوی  $-1$  باشد، آماره بسنده مینیمال برای  $\theta$  کدام است؟

$$\bar{X} \quad (۲) \quad N \quad (۱)$$

$$N + \sum_{\{X_i | X_i \neq -1\}} X_i \quad (۴) \quad (N, \bar{X}) \quad (۳)$$

۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(\theta, \theta+1)$  باشد. اگر  $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$  و

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n) \text{ باشند، کدام گزینه غلط است؟}$$

$$(۱) \quad X_{(n)} - X_{(1)} \text{ آماره فرعی است.}$$

$$(۲) \quad (X_{(n)} - 1, X_{(1)}) \text{ آماره بسنده کامل است.}$$

$$(۳) \quad (X_{(1)}, X_{(n)}) \text{ آماره بسنده مینیمال است.}$$

$$(۴) \quad (X_{(n)} - X_{(1)}, \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}) \text{ آماره بسنده مینیمال است.}$$

۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی باشد، کدام گزینه غلط است؟

$$(۱) \quad (\sum X_i, \sum X_i^2) \text{ آماره بسنده مینیمال برای } N(\mu, \mu^2) \text{ است.}$$

$$(۲) \quad (\sum X_i, \sum X_i^2) \text{ آماره بسنده مینیمال برای } N(\mu, \sigma^2) \text{ است.}$$

$$(۳) \quad \sum X_i^2 \text{ آماره بسنده مینیمال برای } N(\mu, \mu) \text{ است.}$$

$$(۴) \quad (\sum X_i, \sum X_i^2) \text{ آماره بسنده کامل برای توزیع } N(\mu, \mu^2) \text{ است.}$$

۴- فرض کنید  $X \sim B(n, p)$  باشد، کلاس برآوردگرهای صفر کدام است؟

$$\{u : u(k) = (-1)^k, k = 0, 1, \dots, n\} \quad (۲) \quad \{u : u(k) = 0, k = 0, 1, \dots, n\} \quad (۱)$$

$$\{u : u(k) = (p-q)^k, k = 0, 1, \dots, n\} \quad (۴) \quad \{u : u(k) = 1 - (-1)^k, k = 0, 1, \dots, n\} \quad (۳)$$

۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $P(\lambda)$  باشد، مقدار  $E(\sum_{i=1}^n X_i | X_1)$  کدام است؟

$$(n-1)\lambda \quad (۲) \quad n\lambda \quad (۱)$$

$$(n-1)\bar{X} + \lambda \quad (۴) \quad X_1 + (n-1)\lambda \quad (۳)$$

۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد، که در آن  $\mu$  و  $\sigma^2$  پارامترهای مجهول توزیع

$$\text{هستند. مقدار } E\left[\frac{(X_1 - \bar{X})^2}{S^2}\right] \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \quad (۲) \quad \frac{1}{n} \quad (۱)$$

$$\frac{\sigma^2}{n-1} \quad (۴) \quad \frac{n-1}{n} \quad (۳)$$

۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع توزیع پیوسته و اکیداً صعودی  $F(x)$  و میانگین  $\mu$  باشد. متغیرهای تصادفی  $Y_1, \dots, Y_n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{if } X_i > \mu \\ 0 & \text{if } X_i \leq \mu \end{cases}$$

برآوردگر ML پارامتر  $\mu$ ، براساس متغیرهای  $Y_1, \dots, Y_n$  کدام است؟

$$F^{-1}(\bar{Y}) \quad (۱)$$

$$1 - F^{-1}(\bar{Y}) \quad (۳)$$

$$F^{-1}(1 - \bar{Y}) \quad (۲)$$

$$1 - F(\bar{X}) \quad (۴)$$

۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. اگر  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ، نمایانگر تعداد  $X_i$ هایی باشد که  $|X_i| = j$  است، برآوردگر ML پارامتر  $\theta$  کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{2} & \text{if } x = 0 \\ \frac{1-\theta}{4} & \text{if } x = \pm 2, \quad 0 < \theta < 1 \\ \frac{\theta}{2} & \text{if } x = \pm 1 \end{cases}$$

$$1 - \frac{N_1}{n} \quad (۲)$$

$$1 - \frac{N_0}{n} \quad (۴)$$

$$\frac{N_1}{n} \quad (۱)$$

$$\frac{N_2}{n} \quad (۳)$$

۹- فرض کنید  $\theta \in \{0, 1\}$ ،  $0 < x < 1$ ،  $f(x|\theta=0) = 1$  و  $f(x|\theta=1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ،  $0 < x < 1$ . برآورد ML پارامتر  $\theta$  بر

اساس یک نمونه تصادفی  $n$  تایی کدام است؟

$$I_{\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right)} \left( \prod_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right) \quad (۲)$$

$$I_{\left(\frac{1}{n}, \infty\right)} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) \quad (۱)$$

$$I_{\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right)} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) \quad (۴)$$

$$I_{\left(\frac{1}{n}, 1\right)} \left( \prod_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right) \quad (۳)$$

۱۰- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد:

$$f(x|\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} \quad x = -1, 0, 1$$

برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) برای  $\theta$  کدام است؟

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \quad (۲) \quad \bar{X} \quad (۱)$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| \quad (۴) \quad 1 - \bar{X} \quad (۳)$$

۱۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $B(1, p)$  باشد، اگر  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  و  $\hat{p}_1 = \frac{Y}{n}$  و  $\hat{p}_2 = \frac{Y+1}{n+1}$  بر اساس معیار میانگین مربع خطا (MSE) به ازاء چه مقادیری از  $p$ ،  $\hat{p}_1$  بهتر از  $\hat{p}_2$  است؟

$$p < \frac{4}{14} \quad (۲) \qquad p < \frac{4}{13} \quad (۱)$$

$$p < \frac{4}{16} \quad (۴) \qquad p < \frac{4}{15} \quad (۳)$$

۱۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد، چه تابعی از  $S^2$  برآوردگری برای  $\sigma^2$  است که واریانس آن با حد پایین کرامر رانو برابری می‌کند؟

$$\frac{n-1}{n} S^2 \quad (۲) \qquad S^2 \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}} S^2 \quad (۴) \qquad \frac{n}{n-1} S^2 \quad (۳)$$

۱۳- فرض کنید  $X$  دارای توزیع  $U(0,1)$  باشد و متغیر تصادفی  $Z$  به صورت زیر تعریف شود:

$$Z = \begin{cases} X & \text{w.p. } \theta \\ -X & \text{w.p. } (1-\theta) \end{cases}$$

اگر  $Z_1, \dots, Z_n$  یک نمونه تصادفی با توزیعی همانند  $Z$  باشد و متغیرهای تصادفی  $P$  و  $N$  به ترتیب نمایانگر تعداد  $Z_i$  های مثبت و منفی باشند، برآوردگر UMVU پارامتر  $\theta$  کدام است؟

$$\frac{P-N}{n} \quad (۲) \qquad \frac{P}{n} \quad (۱)$$

$$\bar{X}(P-N) \quad (۴) \qquad \bar{X}Z \quad (۳)$$

۱۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین نامعلوم  $\mu$  و واریانس معلوم  $\sigma^2$  باشد، برآوردگر UMVU برای  $F_\mu(c) = P_\mu(X_1 \leq c)$ ، برای هر عدد ثابت  $c$  کدام است؟ ( $\Phi$  تابع توزیع نرمال استاندارد است).

$$\Phi\left(\frac{c-\bar{X}}{\sigma}\right) \quad (۱)$$

$$\Phi\left(\frac{c-\bar{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}\right) \quad (۲)$$

$$\Phi\left(\frac{c-\bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) \quad (۳)$$

$$\hat{F}_n(c) = \frac{\text{تعداد } X_i \text{ هایی که کوچکتر یا مساوی } c \text{ هستند}}{n} \quad (۴)$$

۱۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی فاصله  $(-\theta, \theta)$ ، با  $\theta > 0$  باشد،

$$E(|X_1| \mid \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|)$$

$$\frac{\theta}{2} \quad (۲) \qquad \frac{1}{2} [\max_{1 \leq i \leq n} |X_i|] \quad (۱)$$

$$\frac{n}{n+1} \theta \quad (۴) \qquad \frac{n+1}{2n} [\max_{1 \leq i \leq n} |X_i|] \quad (۳)$$

۱۶- فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta}(x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!(1-e^{-\theta})}, \quad x=1,2,\dots \quad \theta > 0$$

برآوردگر UMVU پارامتر  $1-e^{-\theta}$  کدام است؟

$$\delta(X) = (-2)^X \quad (۲)$$

$$\delta(X) = (-1)^X \quad (۱)$$

$$\delta(X) = \begin{cases} 0 & X=1,3,5,\dots \\ 2 & X=2,4,6,\dots \end{cases} \quad (۴)$$

$$\delta(X) = \begin{cases} 2 & X=1,3,5,\dots \\ 0 & X=2,4,6,\dots \end{cases} \quad (۳)$$

۱۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $B(1, p)$  و  $p$  دارای توزیع پیشین یکنواخت روی فاصله  $(0, 1)$  باشد. تحت تابع زیان مربع خطا برآوردگر بیزی  $p$  کدام است؟

$$\frac{\sum X_i + 1}{n+1} \quad (۲)$$

$$\frac{\sum X_i + 1}{n+2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sum X_i}{n+1} \quad (۴)$$

$$\frac{\sum X_i}{n+2} \quad (۳)$$

۱۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $P(\lambda)$  باشد. اگر  $\lambda$  دارای توزیع پیشین  $\text{Gamma}(1, 2)$  باشد. تحت تابع زیان مربع خطا برآوردگر بیزی  $\lambda$  کدام است؟

$$(f(y) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} \quad \text{آنگاه } Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \text{ اگر})$$

$$\frac{\sum X_i + 1}{n + \frac{1}{2}} \quad (۲)$$

$$\frac{\sum X_i + 1}{n+2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sum X_i + 1}{2n+1} \quad (۴)$$

$$\frac{\sum X_i}{n+2} \quad (۳)$$

۱۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_N$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0, 1)$  و  $N \sim \text{Ge}(p)$  (مدل تعداد آزمایشها) که در آن  $X_i$  ها و  $N$  مستقل از هم هستند. تابع توزیع  $Z = \min(X_1, \dots, X_N)$  در فاصله  $(0, 1)$  کدام است؟

$$F(Z) = \frac{z}{q + pz} \quad (۲)$$

$$F(Z) = z \quad (۱)$$

$$F(Z) = \frac{z}{p + qz} \quad (۴)$$

$$F(Z) = \frac{pz}{z - q} \quad (۳)$$

۲۰- فرض کنید  $X \sim N(0, \frac{1}{\theta})$  و  $\theta$  دارای توزیع پیشین  $\Gamma(\alpha, \beta)$  باشد. تحت تابع زیان  $L(\theta, \delta) = \frac{\delta}{\theta} - \text{Ln} \frac{\delta}{\theta} - 1$  برآوردگر بیزی  $\theta$  کدام است؟

$$\left( X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \rightarrow f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \right)$$

$$\frac{X+\beta}{\alpha-1} \quad (۲)$$

$$\frac{2X+\beta}{2\alpha-1} \quad (۱)$$

$$\frac{X+\beta}{\alpha+1} \quad (۴)$$

$$\frac{X+2\beta}{2\alpha-1} \quad (۳)$$

۲۱- فرض کنید  $X \sim N(\theta, \frac{1}{\theta})$  و  $\theta$  دارای توزیع پیشین  $\Gamma(\alpha, \beta)$  باشد. تحت تابع زیان  $L(\theta, \delta) = \frac{\theta}{\delta} - \ln \frac{\theta}{\delta} - 1$  برآوردگر بیزی  $\theta$  کدام است؟

$$\frac{\alpha - 1}{X + \beta} \quad (۱)$$

$$\frac{\alpha + 1}{X + \beta} \quad (۳)$$

$$\frac{2\alpha + 1}{X + 2\beta} \quad (۲)$$

$$\frac{2\alpha - 1}{2X + \beta} \quad (۴)$$

۲۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\theta, 1)$  باشد. اگر توزیع پیشین جفریز برای  $\theta$  انتخاب شود، تحت تابع زیان مربع خطا برآوردگر بیزی  $\theta$  کدام است؟

$$\bar{X} \quad (۱)$$

$$\bar{X} + 1 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\bar{X}} \quad (۲)$$

$$\bar{X} - 1 \quad (۴)$$

۲۳- فرض کنید  $X | \theta \sim N(\theta, 1)$ ،  $\theta \sim N(0, 1)$  باشد. تحت تابع زیان  $L(\theta, \delta) = e^{(\delta - \theta)} - (\delta - \theta) - 1$ ، برآوردگر بیزی  $\theta$  کدام است؟

$$2(X - 1) \quad (۱)$$

$$(X - \frac{1}{2}) \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2}(X - \frac{1}{2}) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}(X - \frac{1}{2}) \quad (۴)$$

۲۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0, \theta)$  باشد. اگر  $\theta$  دارای توزیع پیشین پاراتو با پارامترهای  $\sigma = 4, \alpha = 2$  باشد، تحت تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بیزی  $\theta$  کدام است؟

$$\left( X \sim \text{Pa}(\alpha, \sigma) \rightarrow f(x) = \frac{\alpha \sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x > \sigma \right)$$

$$\frac{n+4}{n+3} \max(x_{(n)}, 2) \quad (۱)$$

$$\frac{n+4}{n+3} \max(x_{(n)}, 4) \quad (۳)$$

$$\frac{n+3}{n+4} \max(x_{(n)}, 4) \quad (۲)$$

$$\frac{n+3}{n+4} \max(x_{(n)}, 2) \quad (۴)$$

۲۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $B(1, \theta)$  باشد، اگر  $\theta$  دارای توزیع پیشین یکنواخت  $(0, 1)$  باشد، تحت تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن  $\frac{1}{\theta(1-\theta)}$ ، برآوردگر بیزی  $\theta$  کدام است؟

$$2\bar{X} - 1 \quad (۱)$$

$$\bar{X} + 1 \quad (۳)$$

$$\bar{X} + \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\bar{X} \quad (۴)$$

۲۶- در سوال ۲۵، برآوردگر می‌نیماکس کدام است؟

$$\bar{X} \quad (۱)$$

$$\bar{X} + \frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\bar{X} + 1 \quad (۲)$$

$$2\bar{X} - 1 \quad (۴)$$

۲۷- فرض کنید  $X \sim E(\theta)$ ،  $\theta$  دارای توزیع پیشین  $\Gamma(3, \delta)$  باشد. تحت تابع زیان  $L(\theta, \delta) = \frac{(\delta - \theta)^2}{\delta}$ ، برآوردگر بی‌بیزی  $\theta$  کدام است؟  $(X \sim E(\theta) \rightarrow F(X) = \theta e^{-\theta x})$

$$\frac{\sqrt{20}}{X+5} \quad (1) \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{20}}{X+3} \quad (3) \quad (4)$$

۲۸- فرض کنید  $X_1, X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع یکسان  $N(0, 1)$  باشند، توزیع  $Y = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2}$  کدام است؟

$$t(2) \quad (1) \quad \text{Beta}(1, 1) \quad (2)$$

$$F(1, 1) \quad (3) \quad U(0, 2) \quad (4)$$

۲۹- فرض کنید  $X \sim F_{m,n}$  باشد. کدام یک از توابع زیر دارای توزیع  $\text{Beta}(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$  می‌باشد؟

$$\frac{nX}{n+mX} \quad (1) \quad \frac{m}{n+mX} \quad (2)$$

$$\frac{mX}{n+mX} \quad (3) \quad \frac{n}{n+mX} \quad (4)$$

۳۰- اگر  $W$  یک مقدار تصادفی در فاصله  $[0, 1]$  باشد و  $X(W) = W$  و  $X_n(W) = W + W^n$  برای  $n = 1, 2, \dots$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشند. برای دو گزاره زیر گزینه صحیح کدام است؟

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad : A$$

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad : B$$

(۱)  $A$  و  $B$  هر دو برقرار هستند.

(۲)  $A$  برقرار است ولی  $B$  برقرار نمی‌باشد.

(۳)  $B$  برقرار است و  $A$  برقرار نیست.

(۴)  $A$  و  $B$  هیچکدام برقرار نمی‌باشند.

آنالیز ریاضی (۲)

۳۱- اگر  $K$  یک تابع پیوسته باشد و  $V(t) = \int_0^t \sin(t-s)k(s) ds$  آن‌گاه  $V'(t)$  کدام است؟

$$\int_0^t \sin(t-s)K(s)ds \quad (2) \quad \int_0^t \sin(t+s)K(s)ds \quad (1)$$

$$\int_0^t \cos(t-s)K(s)ds \quad (4) \quad \int_0^t \cos(t+s)K(s)ds \quad (3)$$

۳۲- مقدار  $\text{SUP} \left\| \int_0^1 f(t)dt \right\|$  که در آن سوپریمم روی تمامی توابع انتگرال‌پذیر  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 2] \times [0, 2]$  گرفته می‌شود کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (4) \quad 2 \quad (3)$$

۳۳- مقدار  $\frac{(\int_{-1}^1 g(x)dx)^2}{\int_{-1}^1 (g(x))^2 dx}$  SUP که در آن سوپریمم روی تمامی توابع پیوسته ناصفر گرفته می شود کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳)  $\sqrt{2}$

(۴)  $+\infty$

۳۴- اگر P یک چند جمله ای و در یک بازه  $(a, b)$  ( $b > a$ ) تغییرات کل P برابر صفر گردد آن گاه کدام درست است؟

(۱) یک تابع ثابت است.

(۲) P تابع ثابت صفر است.

(۳) P حداکثر یک ریشه حقیقی دارد.

(۴) P حداقل یک ریشه دارد که حقیقی است.

۳۵- تغییرات کل تابع  $\sin 2x$  در  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳)  $4\pi$

(۴)  $8\pi$

۳۶- اگر  $\{f_n\}$  دنباله ای صعودی از توابع پیوسته باشد که روی  $[1, -1]$  به طور نقطه وار به تابع f میل کنند، آن گاه کدام درست است؟

(۱) f پیوسته بوده و  $f_n \rightarrow f$

(۲) طبق قضیه دینی  $f_n \rightarrow f$

(۳) اگر f پیوسته باشد آن گاه طبق قضیه دینی  $f_n \rightarrow f$  در صورت مشتق پذیری  $f_n$  ها، f نیز مشتق پذیر خواهد بود.

۳۷- اگر f یک تابع پیوسته و فرد روی  $[1, -1]$  باشد چه تعداد از گزاره های زیر درست می باشد:  
- دنباله ای از چند جمله ای های فرد موجود است که به طور یکنواخت روی  $[1, -1]$  به f میل کند.

- اگر برای هر n زوج  $\int_{-1}^1 x^n f(x) dx = 0$  آن گاه f تابع ثابت صفر است.

- اگر برای هر n فرد  $\int_{-1}^1 x^n f(x) dx = 0$  آن گاه f تابع ثابت صفر است.

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۱

۳۸- کدام یک از انتگرال های ناسره زیر موجود نیست؟

(۱)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2+|\sin x|} dx$

(۲)  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$

(۳)  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

(۴)  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

۳۹- فرض کنید دو سری توانی  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  و  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$  در  $[-R, R]$  که  $R > 0$  همگرا باشند. اگر روی

این فاصله  $f \neq g$ ، در این صورت در مورد صفرهای تابع  $K = g - f$  در  $[-R, R]$  چه می توان گفت؟

(۱) نامتناهی است.

(۲) نامتناهی است.

(۳) حداکثر شمارش پذیر است.

(۴) در  $[-R, R]$  چگال است.



۴۰- مقدار  $\int_0^2 x^2 d(|x^3|)$  کدام است؟ [ ] علامت جزء صحیح است.

(۱) ۰ (۲) ۱

(۳) ۲۶ (۴) ۷۲

۴۱- تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  با کدام مجموعه از نقاط پیوستگی انتگرال پذیر ریمان است؟

(۱)  $\emptyset$  (۲)  $[0, \frac{1}{2}]$

(۳) مجموعه کانتور (۴) اعداد گنگ در  $[0, 1]$

۴۲- اگر  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و  $g$  انتگرال پذیر ریمان باشد، کدام یک از توابع زیر لزوماً انتگرال پذیر ریمان خواهد بود؟

(۱)  $f \circ g$  (۲)  $g \circ f$

(۳)  $g \circ g$  (۴) هیچ کدام

۴۳- مقدار انتگرال بالایی  $\int_0^2 [x] d(x[x])$  کدام است؟ [ ] علامت جزء صحیح است.

(۱) ۵ (۲) ۶

(۳) ۷ (۴) ۱۳

۴۴- اگر  $\alpha(x) = [x]$ ,  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$  آن گاه مقدار انتگرال پایینی  $\int_{-1}^1 \text{sgn}(x) d\alpha$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱

(۳) ۱ (۴) ۳

۴۵- کدام یک از توابع زیر در  $(0, 1)$  با تغییرات کراندار است؟

(۱)  $x \sin \frac{1}{x}$  (۲)  $x^2 \sin \frac{1}{x}$

(۳)  $x \sin \frac{1}{x^2}$  (۴)  $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$

۴۶- برای مجموعه  $A \subseteq \mathbb{R}$ ، تابع مشخصه  $A$  را با  $\chi_A$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

در مورد دنباله  $\{\chi_{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}\}$  کدام یک صحیح است؟

(۱) به طور یکنواخت به  $\chi_{\{0\}}$  همگرا است. (۲) فقط به طور نقطه وار به  $\chi_{\{0\}}$  همگرا است.

(۳) به طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا است. (۴) فقط به طور نقطه وار به تابع ثابت صفر همگرا است.

۴۷- مقدار  $\int_0^2 e^{-x^2} d(\int_0^{x^2} te^t dt)$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴

(۳) ۸ (۴) ۱۶

۴۸- اگر  $f(t) = \sin t$  و  $T(x)$  بیان گر تغییرات کل  $f$  در  $[0, x]$  باشد آن گاه  $\int_0^{2\pi} T(x) dx$  کدام است؟

(۱)  $3\pi$  (۲)  $4$

(۳)  $3 + 4\pi$  (۴)  $4 + 2\pi$

۴۹- اگر تابع  $\psi$  روی  $(0, 1)$  به صورت زیر تعریف گردد

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

آن گاه مقدار حد زیر کدام است؟

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x+n+1)}{\psi(n+1)n^x}, \quad x \in (0, 1)$$

(۱)  $\psi(x)$  (۲)  $\frac{1}{\psi(x)}$

(۳) صفر (۴)  $1$

۵۰- دنباله  $\{f_n\}$  که  $f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x[\frac{n}{n+1}x]$ ، [ ] علامت جزء صحیح است.

را در نظر بگیرید. این دنباله:

(۱) فقط به طور نقطه‌وار همگرا است.

(۲) به طور نقطه‌وار همگرا نیست.

(۳) به طور یکنواخت همگرا است.

(۴) به طور یکنواخت کراندار است.

۵۱- تابع پیوسته  $f: [0, \frac{1}{4}] \rightarrow [0, \frac{1}{4}]$  را در نظر گرفته و دنباله تابعی  $g_1(x) = f(x)$  ،  $g_n(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$

را در نظر بگیرید. این دنباله:

(۱) به طور نقطه‌وار همگرا نیست.

(۲) به طور یکنواخت به تابع  $f$  همگرا است.

(۳) به طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا است.

(۴) فقط به طور نقطه‌وار به تابع ثابت صفر همگرا است.

۵۲- اگر  $V(x)$  تغییرات کل تابع  $\cos t$  در بازه  $[0, x]$  باشد مقدار  $V'(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۳- اگر  $Q = \{r_1, r_2, \dots\}$  مجموعه اعداد گویا بین  $0$  و  $3$  و  $x \in [0, 3]$  ،  $f_n(x) = \inf\{|x - r_k| : K \leq n\}$  آن گاه

کدام است؟  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^3 f_n(x) dx$

(۱) صفر (۲)  $1$

(۳)  $2$  (۴)  $3$

۵۴- فاصله نقطه  $x \in \mathbb{R}$  از مجموعه ناتهی  $A \subseteq \mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$$

برای مجموعه  $A = \{1, 2, \dots, N\}$  تغییرات کل تابع  $f(x) = d(x, A) - x$  روی  $(-\infty, +\infty)$  کدام است؟

$N + 1$ (۲)	$N$ (۱)
$\frac{N(N+1)}{2}$ (۴)	$N - 1$ (۳)

۵۵- مقدار  $\int_{-1}^1 x d(|x|)$  کدام است؟

-۱ (۲)	صفر (۱)
۲ (۴)	۱ (۳)

۵۶- شعاع همگرایی سری توانی  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$  که در آن  $a_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ n e^n & \text{فرد } n \end{cases}$  کدام است؟

$e^{-2}$ (۲)	$e^2$ (۱)
$e^{-\frac{1}{2}}$ (۴)	$\frac{1}{e^2}$ (۳)

۵۷- مقدار  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log n}$  کدام است؟

۱ (۲)	صفر (۱)
$\log 2$ (۴)	$+\infty$ (۳)

۵۸- مقدار حد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^{n-1}}{n^{n+1}}$  کدام است؟

$\sqrt{2\pi}$ (۲)	صفر (۱)
$\frac{1}{e\sqrt{2\pi}}$ (۴)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (۳)

۵۹- در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(1+x^2)n\sqrt{n}}$  کدام درست است؟

(۱) به طور یکنواخت همگرا است.

(۲) به طور نقطه‌وار همگرا نیست.

(۳) به طور نقطه‌وار همگرا است ولی به طور یکنواخت همگرا نیست.

(۴) روی زیرمجموعه‌های فشرده از  $\mathbb{R}$  به طور یکنواخت همگرا است ولی روی زیرمجموعه‌های غیرفشرده چنین نیست.

۶۰- شعاع همگرایی سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} (4^n + 5^n) x^{2n}$  کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۲)	۵ (۱)
$\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۴)	$\frac{1}{5}$ (۳)